И. Н. Шевченко

# АРИФМЕТИКА

УЧЕБНИК
ДЛЯ 5 И 6 КЛАССОВ
СЕМИЛЕТНЕЙ И СРЕДНЕЙ
ШКОЛЫ

Москва
1959

И. Н. ШЕВЧЕНКО

# АРИФМЕТИКА

УЧЕБНИК
ДЛЯ 5 и 6 КЛАССОВ
СЕМИЛЕТНЕЙ И СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАНИЕ 4-е

*Утверждён*
*Министерством просвещения РСФСР*



Москва — 1959

*Иван Никитич Шевченко*

Арифметика, учебник для 5 и 6 классов семилетней и средней школы.

Редактор *В. С. Капустина*
Обложка художника *Г. С. Богачёва*
Технический редактор *М. Д. Козловская*

*Часть первая.*

# Целые числа.

Глава первая.

## Нумерация. Меры длины и веса.

### § 1. Счёт.

Уже в очень отдалённые времена людям приходилось считать окружающие их предметы: членов своей семьи, домашних животных, оружие, убитых или пойманных на охоте зверей и т. д.

История говорит нам, что первобытные люди умели сначала отличать только один предмет от многих; затем они стали считать до двух и до трёх, а всё, что было больше трёх, обозначали словом «много».

С течением времени люди овладели счётом на пальцах; если же предметов было больше, чем пальцев у человека, то наши отдалённые предки уже испытывали затруднения.

Для выполнения счёта пользовались также различными простыми приспособлениями, например зарубками на палке, пучками прутиков, камешками и различными бусами. Предметов, которые сосчитывались, было немного, поэтому и счёт был несложный.

Считая эти предметы, люди пришли к понятию числа предметов. Они поняли, что на вопрос, сколько охотник убил зверей, можно ответить, показав пять пальцев своей руки. С другой стороны, если у человека имеется пять стрел, то он тоже может показать пять пальцев.

Таким образом, хотя предметы совершенно различны (звери и стрелы), но их имеется поровну, т. е. стрел столько же, сколько и зверей. Значит, и группе зверей, и пучку стрел соответствует одно и то же число — пять.

Прошло очень много времени, прежде чем люди освоились с большими числами. Они шли от числа один, или единица, к большим числам очень медленно.

## § 2. Счёт группами.

Ведя счёт различных предметов, люди пришли к выводу, что удобно считать не единицами, а группами единиц.

А насколько это удобно, видно хотя бы из того, что счёт группами сохранился и до нашего времени. Очень часто предметы и теперь считают по два, или парами. Например, ученик покупает в магазине перья. Продавец отсчитывает эти перья парами, т. е. он отодвигает в сторону по два пера, и говорит: одна, две, три, четыре, пять пар. Значит, он отсчитал 10 перьев.

Также часто считают тройками. При подсчёте каких-нибудь мелких предметов — пуговиц, карандашей, иголок, спичек, гвоздей и т. д. — их берут сразу по три и считают не число отдельных предметов, а число троек этих предметов. Весьма распространён счёт пятка́ми. Это и понятно, так как у человека на руках по пяти пальцев.

Всем известно, что многие предметы мы считаем десятками: яйца, яблоки, груши, огурцы и т. д.

С помощью каких же групп лучше всего считать? В настоящее время наиболее удобной считается группа из десяти единиц. Десятками пользуются широко и в жизненной практике, и в науке. В арифметике число десять имеет особо важное значение.

## § 3. Устная нумерация.

Если, может быть, наши отдалённые предки не вполне понимали, что числа должны иметь наименования, и человек на вопрос, сколько у него стрел, мог просто показать пять пальцев, то теперь мы понимаем, что каждому числу нужно дать своё название. Но чисел очень много, так как есть совокупности, содержащие много предметов. Поэтому возникает вопрос: как достигнуть того, чтобы все числа получили названия, но чтобы различных слов для этого было не очень много? Это достигается следующим образом: сначала устанавливаются наименования для первых десяти чисел; затем из этих наименований, путём разнообразного их соединения и прибавления ещё немногих новых слов, составляются названия всех последующих чисел. Представим себе, что мы считаем какие-нибудь предметы и при этом произносим слова: один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять. В процессе этого счёта мы получили названия первых десяти чисел.

Продолжая считать дальше, мы говорим: одиннадцать, двенадцать, тринадцать, четырнадцать, пятнадцать, шестнадцать, семнадцать, восемнадцать, девятнадцать, двадцать.

Подумаем теперь о названиях этих десяти чисел. Прежде всего, когда мы называем эти числа вслух, то каждый раз слышим слово «дцать». Это есть не что иное, как несколько искажённое слово «десять». Значит, эти названия нужно понимать так: один на десять, два на десять, три на десять и т. д. «На десять» — значит, сверх десяти. В старых русских книгах, например в арифметике Л. Ф. Магницкого (напечатана в 1703 г.), так и писалось: «един на десять» и т. д. Может быть, естественнее было говорить «один и десять», но наши предки предпочли говорить «один на десять». Слово же «двадцать» обозначает два десятка.

Обратите внимание на то, что чисел у нас было пока д в а д ц а т ь, а совершенно различных названий только д е с я т ь, потому что названия чисел второго десятка мы составляли из названий чисел первого десятка и слова «дцать».

Будем считать дальше: двадцать один, двадцать два, двадцать три, двадцать четыре, двадцать пять, двадцать шесть, двадцать семь, двадцать восемь, двадцать девять, тридцать.

Мы получили названия ещё десяти чисел. Эти названия возникли путём прибавления к слову «двадцать» названий чисел первого десятка, т. е. мы получили двадцать и один, двадцать и два и т. д. Последнее название тридцать обозначает три десятка.

Продолжая считать далее, мы получим названия чисел четвёртого десятка, затем пятого, шестого, седьмого, восьмого, девятого и десятого. Названия новых чисел будут возникать так же, как и в пределах третьего десятка; только в трёх случаях появятся новые слова. Это будут слова: с о р о к для обозначения четырёх десятков, д е в я н о с т о для девяти десятков и с т о для десяти десятков (хотя в слове «девяносто» имеется уже знакомый корень).

Названия чисел, бóльших ста, составляются из слова «сто» и названий чисел первого и последующих десятков. Таким путём получаются наименования: сто один, сто два, ..., сто девять, сто десять, сто одиннадцать, ..., сто двадцать и т. д. Отсчитав новую сотню, мы будем иметь две сотни, которые сокращённо называются «двести». Для получения чисел, больших двухсот, мы снова воспользуемся названиями чисел первого и последующих десятков, которые будем присоединять к слову «двести». Затем мы будем отсчитывать последующие сотни и после каждой новой сотни будем получать особое название: триста, четыреста, пятьсот и т. д. до тех пор, пока отсчитаем десять сотен, которые носят особое название — т ы с я ч а.

Счёт за пределами тысячи ведётся так: прибавляя к тысяче по единице (тысяча один, тысяча два и т. д.), получим две тысячи, три тысячи, четыре тысячи и т. д. Когда же мы отсчитаем тысячу тысяч, то это число получит особое наименование —

миллион (от латинского mille — тысяча). Дальше мы будем считать миллионами до тех пор, пока дойдём до тысячи миллионов. Полученное новое число (тысяча миллионов) будет иметь особое название — биллион (латинская приставка bi означает удвоение). Биллион иначе называется миллиардом. Тысяча биллионов (миллиардов) называется триллионом. Чтобы не обременять память, мы ограничимся только этими наименованиями.

Таким образом, для того чтобы назвать все числа от единицы до триллиона, потребовалось только 16 различных слов: **один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сорок, сто, тысяча, миллион, биллион, триллион.** Остальные названия чисел (до триллиона) получаются из этих основных.

## § 4. Письменная нумерация.

Для записи или для обозначения чисел существует десять особых знаков, называемых цифрами:

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

С помощью этих десяти цифр можно написать любое число. Это делается следующим образом. Первые девять чисел от единицы до девяти записываются указанными выше знаками: 1; 2;...; 9.

Следующие за девятью числа записываются при помощи тех же самых знаков и знака 0 (нуль), т. е. так: 10 (нуль показывает, что в этом числе нет единиц), 11, 12, 13 и т. д.

Обратим внимание на то, что для чисел от 11 до 20 название не совпадает с написанием; когда мы говорим «одиннадцать», то сначала произносим один, а потом десять, а пишем, наоборот, сначала десяток, а потом единицу.

Следующие за 20 числа пишутся так: 21; 22; 23 и т. д.

Заметим, что здесь нет разницы между названием и написанием чисел: как мы называем число, так его и пишем.

Дальнейшие числа от 30 до 100 будут записываться по образцу записи чисел от 20 до 30.

Значит, единицы числа пишутся на первом месте справа, а десятки — на втором месте, т. е. левее единиц.

Числа от ста до тысячи пишутся так: единицы — на первом месте справа, десятки — на втором и сотни — на третьем месте.

Нуль обозначает отсутствие либо единиц, либо десятков, либо сотен. Например, число сто два (102) не имеет десятков, на их месте стоит нуль; число триста двадцать (320) не имеет единиц, поэтому первое место справа занято нулём; число 1 000 имеет три нуля справа, т. е. нули занимают места единиц, десятков и сотен.

Числа, превосходящие тысячу, изображаются следующим образом. Пусть нужно написать число: тысяча двести тридцать четыре. Для его изображения требуется четыре цифры: на первом месте справа будет стоять цифра единиц, на втором месте будет цифра десятков, на третьем месте — цифра сотен и на четвёртом — цифра тысяч. Значит, заданное число будет иметь вид: 1 234.

Напишем теперь число: две тысячи сорок пять. Оно будет записано тоже четырьмя цифрами, но так как в нём не указано число сотен, то их место будет занято нулём: 2 045.

Так как тысячи мы тоже считаем десятками и сотнями, когда, например, говорим двадцать тысяч, триста тысяч, то легко понять, что, умея писать числа, состоящие из десятков и сотен, мы напишем и числа, состоящие из нескольких десятков и сотен тысяч. Напишем, например, числа: тридцать пять тысяч шестьсот семьдесят восемь и четыреста две тысячи пятьсот девять:

35 678; 402 509.

Во втором числе на месте десятков и десятков тысяч стоят нули.

Число «один» называется *единицей первого разряда*; десять единиц первого разряда, т. е. число «десять», называется *единицей второго разряда*; десять единиц второго разряда (десять десятков), т. е. число «сто», называется *единицей третьего разряда*. Так будет продолжаться и дальше, т. е. десять единиц какого-нибудь низшего разряда будут составлять одну единицу следующего за ним высшего разряда.

Указанные три первых разряда соединяют в одну группу и называют *первым классом*, или *классом единиц*. В первый класс входят: единицы, десятки и сотни.

Десять сотен образуют единицу *четвёртого* разряда—тысячу. Десять тысяч образуют единицу *пятого* разряда, а сто тысяч — единицу *шестого* разряда. К трём разрядам прибавилось ещё три новых разряда (четвёртый, пятый и шестой), которые образуют *второй класс*, именуемый *классом тысяч*. Во второй класс входят: единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

За вторым будет следовать *третий класс* — *класс миллионов*, состоящий тоже из трёх разрядов: седьмого, восьмого и девятого, т. е. из единиц миллионов, десятков миллионов и сотен миллионов, и т. д.

Мы рассказали, как называются числа и как они записываются. Несмотря на то что мы не могли рассмотреть каждое число от единицы до триллиона (для этого потребовалось бы очень много места и времени), всё же мы можем теперь назвать и написать любое число в этих границах. Это возможно потому, что путём рассмотрения некоторых немногих чисел мы установили *общие правила* называния и написания чисел. Совокупность правил, служащих для наименования и обозначения чисел, называется **системой счисления,** или **нумерацией.**

В системе, которую мы изложили, особо важное значение имеет число 10, и поэтому наша система носит название **десятичной** системы счисления (нумерации).

Напишем число 285 468 с указанием возле каждой цифры места, занимаемого ею в этом числе:

$$\underbrace{\overset{2}{\text{сотни}}\quad\overset{8}{\text{десятки}}\quad\overset{5}{\text{единицы}}}_{\text{класс тысяч}}\quad\underbrace{\overset{4}{\text{сотни}}\quad\overset{6}{\text{десятки}}\quad\overset{8}{\text{единицы}}}_{\text{класс единиц}}$$

Обратите внимание на то, что цифра 8 встречается в этом числе два раза. Она стоит на первом месте справа, т. е. занимает место единиц, и на пятом месте справа, т. е. занимает место десятков тысяч.

Таким образом, значение любой цифры зависит не только от того, *сколько единиц* в соответствующем ей числе, но и от того, *какое место* она занимает в записи числа. Поэтому десятичную систему счисления принято называть *поместной* или позиционной (заимствованное из латинского языка слово «позиция» означает положение).

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., возникающие в процессе счёта, называются **целыми числами,** а совокупность этих чисел, расположенных в порядке их возрастания, называется **натуральным рядом.**

Наименьшим числом натурального ряда является единица, а наибольшего числа нет, так как, какое бы большое число мы ни взяли, увеличив его на единицу, получим новое число. Эту мысль можно выразить так: **натуральный ряд чисел бесконечен.**

Число, изображаемое одной цифрой, называется однозначным, например 9; число, изображаемое двумя цифрами, называется двузначным, например 23; число, изображаемое тремя цифрами, — трёхзначным, например 509, и т. д. Употребляется ещё термин многозначные числа.

## § 5. Абак и счёты.

Письменность в глубокой древности развита была слабо, а считать необходимо было каждому человеку, поэтому и приходилось употреблять для счёта камешки, бусы и другие предметы.

Со временем люди придумали очень простое, но весьма практичное приспособление, называемое *абаком*. Абак применялся древними греками, римлянами и другими народами. Его устройство в разное время и в разных местах менялось, но основная мысль этого приспособления состояла в следующем. Это была доска с продольными желобками, в которых размещались первоначально камешки, а в более поздние времена — особые жетоны. На абаке крайний правый желобок служил для единиц, следующий — для десятков и т. д. Представим себе, что нужно было отложить число 65 043; тогда жетоны располагались в желобках следующим образом (рис. 1).

В столбце, помеченном на рисунке буквами *Д—Т* и предназначенном для десятков тысяч, размещено 6 жетонов; это значит, что в нашем числе 6 десятков тысяч. Следующий столбец направо помеченный буквой *Т* (тысячи), содержит 5 жетонов, т. е. 5 тысяч. Столбец, помеченный буквой *С* (сотни), пустой, потому что в нашем числе нет сотен, а на их месте стоит нуль (0). В двух последних справа столбцах, как и следует ожидать, столько жетонов, сколько десятков и единиц в рассматриваемом числе.

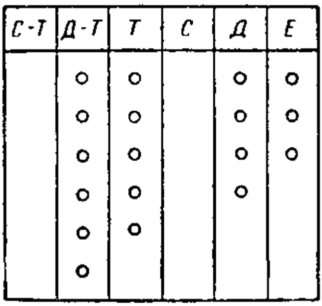


Рис. 1.

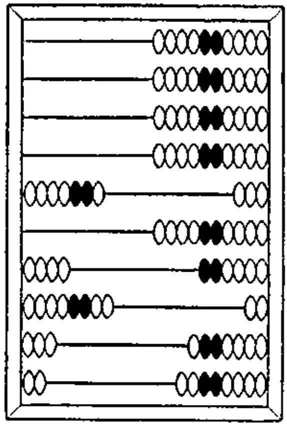

Рис. 2.

Приспособления, подобные абаку, применялись и в нашей стране нашими предками-славянами. Самые древние из этих приспособлений по своему виду напоминали абак. Более поздним и усовершенствованным прибором был другой, состоявший из верёвочек с нанизанными на них костяшками. Этот прибор, по-видимому, и является предком современных счётов, которые до сих пор широко распространены и с успехом применяются во всех денежных и иных расчётах.

Счёты представляют собой деревянную четырёхугольную раму с поперечными проволоками, по которым перемещаются круглые косточки. На каждой проволоке — 10 косточек (рис. 2).

На первой проволоке с н и з у откладываются единицы, на второй — десятки, на третьей — сотни, на четвёртой — тысячи и т. д.

Если на счётах ничего не положено, то все косточки должны быть сдвинуты вправо. Допустим, что нам нужно отложить на счётах число 704 832; тогда на шестой проволоке откладывают влево 7 косточек (т. е. семь сотен тысяч); на пятой проволоке ничего не откладывают, так как в данном числе нет десятков тысяч; на четвёртой проволоке откладывают 4 косточки (т. е. четыре тысячи), на третьей проволоке откладывают 8 косточек, на второй — 3 и на первой проволоке — 2 косточки.

## § 6. Римские цифры.

Десятичная система нумерации, о которой мы говорили в четвёртом параграфе, возникла в Индии. Впоследствии её стали называть «арабской», потому что она была перенесена в Европу арабами. Цифры, которыми мы теперь пользуемся, тоже называются арабскими.

Кроме этих цифр, в разное время существовали другие цифры, в настоящее время почти совершенно забытые. Однако до сих пор мы иногда встречаемся с римскими цифрами, например на циферблатах часов, в книгах для обозначения глав или частей, на деловых бумагах для обозначения месяцев и т. д.

Римские цифры имеют следующий вид:

| | |
|---|---|
| I — один | L — пятьдесят |
| V — пять | C — сто |
| X — десять | D — пятьсот |

M — тысяча.

Как же пишутся числа с помощью этих цифр?

Числа первого десятка пишутся так:

| I, | II, | III, | IV, | V, | VI, | VII, | VIII, | IX, | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Некоторые цифры пишутся путём повторения другой цифры, например: III (три), XXX (тридцать).

Если меньшая цифра стоит после большей, то она складывается с большей (VIII—8, т. е. $5 + 3 = 8$).

Если меньшая цифра стоит перед большей, то она вычитается из большей (IV — 4, т. е. $5 - 1 = 4$; в этом случае меньшая цифра не может повторяться несколько раз).

Примеры. LXX = 70; CX = 110; XC = 90.

## § 7. Меры длины.

Научившись считать окружающие предметы, человек получил возможность сравнивать различные совокупности их. Например, если в одном стаде 20 коров, а в другом 17, то очевидно, что первое стадо больше второго. Таким образом, сосчитав предметы различных совокупностей, мы можем их сравнить, т. е. дать ответ на вопрос, какая совокупность б о л ь ш е и какая м е н ь ш е. Постепенно люди научились решать более трудные вопросы. Например, человек живёт в определённом месте и замечает, что от его жилища до леса несколько дальше, чем до реки. Но как сравнить эти расстояния? Что здесь надо считать? В этом случае нужно выбрать какую-нибудь е д и н и ц у и з м е р е н и я и измерить ею оба указанных расстояния. Значит, в этом случае нужно с о с ч и т а т ь ч и с л о е д и н и ц и з м е р е н и я. Какое из двух чисел окажется больше, тому будет соответствовать и большее расстояние.

Откуда взять единицу измерения? В отдалённые времена люди пользовались для этой цели, например, своими шагами, длиной руки, расстоянием между концами раздвинутых большого и указательного пальцев руки и т. п.

Однако, когда люди живут в коллективе, им необходимо иметь одинаковые и более точные единицы измерения, иначе они перестанут понимать друг друга. Поэтому уже давно возникла потребность пользоваться одной единицей измерения, сначала внутри своей общины, а потом уже в пределах страны. С развитием производства и торговли появилась необходимость в международных единицах измерения.

В настоящее время почти во всех странах мира введены **метрические меры,** которые были созданы в конце XVIII века во Франции. Создатели этих мер стремились найти такую единицу измерения длины, которая была бы взята из природы, т. е. представляла бы собой длину какого-нибудь расстояния существующего на Земле. Такая единица всегда может быть восстановлена с помощью повторных измерений.

Творцы метрических мер измерили длину земного меридиана и приняли за единицу длины отрезок, который содержится в четверти меридиана 10 000 000 раз. Эта длина и была названа **метром,** что в переводе с греческого языка означает «мера». Позднейшие измерения показали, что первоначальные измерения были недостаточно точными и что образец метра только приблизительно равен одной десятимиллионной части четверти меридиана. Однако так как ошибка была ничтожна, то первоначальный образец метра был сохранён. Метры, которыми сейчас пользуются, являются копиями того образца, какой был изготовлен в конце XVIII века во Франции и положен на хранение в Международное бюро мер и весов в Севре, близ Парижа.

У нас в СССР метрические меры введены во всеобщее употребление в 1918 году.

Наряду с метром существуют единицы измерения, бóльшие метра и меньшие его.

Для образования названий единиц, бо́льших метра, употребляются приставки греческого происхождения: дека (десять), гекто (сто), кило (тысяча), а для образования названий единиц, меньших метра, — приставки латинского происхождения: деци (в смысле одна десятая), санти (одна сотая), милли (одна тысячная). Таким образом, получается следующая таблица метрических мер длины:

километр (*км*) = 10 гектометрам = 1 000 метрам,
гектометр (*гм*) = 10 декаметрам = 100 метрам,
декаметр (*дкм*) = 10 метрам,
метр (*м*) = 10 дециметрам = 100 сантиметрам,
дециметр (*дм*) = 10 сантиметрам,
сантиметр (*см*) = 10 миллиметрам (*мм*).

## § 8. Меры веса.

Меры веса до конца XVIII века были в разных странах различны. Одновременно с введением метрических мер длины были созданы и метрические меры веса. Важнейших единиц измерения веса две: **грамм** и **килограмм**.

Почему были выбраны именно эти единицы измерения и как они были установлены, будет сказано позже (стр. 64). Меры веса, меньшие грамма, носят следующие названия: дециграмм, сантиграмм и миллиграмм. Они связаны с граммом следующим образом:

1 грамм (*г*) = 10 дециграммам,
1 дециграмм = 10 сантиграммам,
1 сантиграмм = 10 миллиграммам.

Меры веса, бо́льшие грамма, носят следующие названия:

1 килограмм (*кг*) = 1 000 граммам,
1 центнер (*ц*) = 100 килограммам,
1 тонна (*т*) = 1 000 килограммам.

## § 9. Округление чисел.

Мы научились называть и писать числа. С помощью этих чисел мы будем выражать количество предметов всевозможных совокупностей и результаты измерения различных величин. Этими числами мы будем пользоваться при решении самых разнообразных задач. Приведём несколько примеров с числовыми данными.

1. Семья школьника Степанова состоит из 5 человек.
2. Расстояние от Москвы до Киева 860 *км*.
3. В городе $N$ живет 87 000 человек.

К данным числам мы должны отнестись по-разному. Когда мы говорим, что в семье Степанова 5 человек, то это число точно выражает состав указанной семьи.

Когда же мы говорим, что от Москвы до Киева 860 *км*, то это число нельзя признать столь же точным, как число членов семьи, потому что измерение такого большого расстояния не может быть выполнено точно. Поэтому, когда мы читаем, что расстояние от Москвы до Киева 860 *км*, то это значит, что оно близко к этому числу: оно может быть немного больше 860 *км* или немного меньше, а в справочниках печатают «округлённое» число 860 *км*.

Указанное в 3-м примере число 87 000 обозначает население города $N$. Число жителей большого города не может быть постоянным даже в течение одного дня, так как люди ежедневно прибывают и убывают. Значит, подобные числа необходимо «округлять», и нет сомнения в том, что число 87 000 является округлённым, в нём мы видим только число тысяч, а сотни, десятки и единицы не указаны и их места заняты нулями.

При решении задач и при выполнении различных вычислений приходится округлять многие числа. Округление выполняется следующим образом. Возьмём два числа: 38 246 и 27 958. Пусть каждое из этих чисел нужно округлить, сохранив в них тысячи. Начнём с первого числа. Сколько в нём тысяч? — 38 тысяч. Кроме тысяч, в нём имеется ещё 246 единиц, которые не могут составить ни одной тысячи. Чтобы округлить это число до тысяч, в нём сохраняют только тысячи, остальные цифры отбрасывают и их места заполняют нулями (38 000).

Когда же мы станем округлять до тысяч второе число, то с ним придётся поступить иначе. В числе 27 958 содержится 27 тысяч, да сверх того 958 единиц. Эти единицы составляют почти целую тысячу. Поэтому при округлении таких чисел лучше взять не 27, а 28 тысяч. Места сотен, десятков и единиц и в этом случае следует заполнить нулями (28 000).

Отсюда получаем следующее правило округления чисел: **если при округлении первая** (слева) **отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют; если первая отбрасываемая цифра больше 5 или равна 5, с последующими отличными от нуля цифрами, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу; наконец, если отбрасывается единственная цифра, равная 5, то последняя цифра не изменяется, когда она чётная, и увеличивается на 1, когда она нечётная.**

Примеры. а) Округлить до тысяч 32 176. Здесь первая из отбрасываемых цифр 1 (счёт цифр ведётся слева направо). Следовательно, округлённое число будет иметь вид: 32 000.

б) Округлить до сотен 32 176. Первая из отбрасываемых цифр 7. Значит, округлённое число будет иметь вид: 32 200.

Глава вторая.

# Арифметические действия.

## § 10. Понятие об арифметическом действии.

Рассмотрим задачу: «Ученик купил 20 тетрадей в клетку и 10 тетрадей в линейку. Сколько он купил всего тех и других тетрадей?»

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно взять число тетрадей в клетку, т. е. 20, и число тетрадей в линейку, т. е. 10, и из этих чисел составить новое число, которое и покажет нам, сколько он всего купил тетрадей.

Рассмотрим другую задачу: «В прошлом году для буфета купили 24 стакана. За истекшее с тех пор время разбилось 5 стаканов. Сколько стаканов осталось?»

Этот случай отличается от предыдущего не только тем, что здесь речь идёт о других предметах, но ещё и тем, что здесь говорится об убыли, о потере нескольких ранее существовавших предметов. Здесь нас интересует число оставшихся предметов. И в этом случае из двух данных чисел 24 и 5 нужно составить новое число, которое и даст нам этот остаток.

В рассмотренных примерах нам указывались или, как принято говорить, давались два числа и нужно было, зная эти (данные) числа, найти новое число. Если по двум данным числам требуется найти новое число, то говорят, что над числами нужно выполнить *арифметическое действие*. Значит, арифметическим действием называется нахождение по двум данным числам третьего числа. Найденное число называется результатом этого действия.

На следующих страницах мы будем последовательно изучать четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение и деление.

## СЛОЖЕНИЕ.

### § 11. Понятие о сложении.

Рассмотрим задачу: «Я купил несколько штук яблок. В магазине эти яблоки были уложены в два пакета. Придя домой, я выложил яблоки на тарелку и обнаружил, что в первом пакете было 9 яблок, а во втором 6. Сколько всего яблок я принёс домой?»

Чтобы ответить на этот вопрос, надо при перекладывании яблок одновременно их пересчитать, например, выкладывая яблоки из первого пакета, говорить: одно, два, три и т. д. до девяти, а затем, вынимая яблоки из второго пакета, продолжать: десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать, четырнадцать, пятнадцать. Значит, всего 15 яблок.

Рассмотрим ещё одну задачу: «Учитель собирает контрольные работы по арифметике. В классе два ряда парт, в первом ряду он собрал 14 тетрадей, а во втором ряду — 13. Сколько всего тетрадей с контрольными работами собрал учитель?»

И в этом случае, перечисляя тетради, мы к числу тетрадей первой пачки прибавим число тетрадей второй и получим общее число всех тетрадей, т. е. 27.

Действие над двумя числами, которое мы выполнили в задачах, называется *сложением*.

Следовательно, при сложении два числа соединяются в одно число, содержащее в себе все единицы, входившие в данные числа. Числа, которые нужно сложить, называются **слагаемыми**, а результат сложения, т. е. число, получающееся от сложения, называется **суммой.**

Сложение представляет собой действие, которое всегда выполнимо, т. е. какие бы числа мы ни взяли в качестве слагаемых, всегда можно найти их сумму. Результат сложения выражается всегда определённым единственным числом.

*Замечание.* Прибавление к числу нуля не изменяет этого числа, так как нуль указывает на отсутствие единиц. Поэтому:

$$10 + 0 = 10,$$
$$0 + 10 = 10,$$
$$0 + 0 = 0.$$

## § 12. Законы сложения.

При сложении чисел мы удем опираться на два закона: переместительный и сочетательный.

**1. Переместительный закон.** Возьмём два числа, например 3 и 5. Будем искать их сумму. Для этого мы можем взять число 3 и последовательно присчитать к нему все единицы числа 5. Получим число 8.

Но мы могли бы сначала взять число 5 и присчитать к нему все единицы числа 3. Мы снова получили бы 8.

Значит, мы можем сказать, что если

$$3 + 5 = 8, \text{ то и } 5 + 3 = 8.$$

И, наконец, можем написать:

$$3 + 5 = 5 + 3 = 8.$$

Это свойство и называется переместительным законом сложения. Словами его можно выразить так: **сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.**

Законы действий, свойства действий и различные правила, с которыми мы встретимся в будущем, очень удобно записывать, обозначая числа буквами. Принято употреблять буквы латинского алфавита. Запишем переместительный закон при помощи букв или, как говорят, **в общем виде.** Для этого обозначим первое слагаемое буквой $a$ и второе слагаемое буквой $b$, тогда переместительный закон можно будет написать в виде такого равенства:

$$a + b = b + a.$$

Эта запись на первых порах кажется малопонятной, но уже теперь можно оценить её значение. В самом деле такая запись показывает, что переместительный закон относится уже не только к каким-нибудь двум определённым числам, но вообще ко всяким другим числам.

**2. Сочетательный закон.** Возьмём сумму трёх чисел:

$$5 + 4 + 8 = 17.$$

Эту сумму можно вычислить разными способами. Например, взять сумму двух первых чисел и прибавить к ней оставшееся третье число, т. е.

$$5 + 4 = 9; \ 9 + 8 = 17.$$

С другой стороны, можно сначала найти сумму второго и третьего слагаемых и прибавить к ней первое число:

$$4 + 8 = 12; \ 5 + 12 = 17.$$

Мы соединяли в группу по два слагаемых, находили их сумму и затем прибавляли к этой сумме третье слагаемое. В обоих случаях получался один и тот же окончательный результат.

Следовательно, можно сделать такой вывод: **сумма не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых мы заменим их суммой.** Это и есть сочетательный закон сложения. Его название говорит о том, что слагаемые можно сочетать в группы. Сочетать — значит соединять.

Мы разъяснили этот закон, выполняя два раза сложение различными способами. Можно было бы записать этот процесс и иначе. Для этого придётся употребить скобки ( ); тогда получится следующее:

$$5 + 4 + 8 = (5 + 4) + 8 = 5 + (4 + 8) = 17.$$

Принято говорить, что мы заключили в скобки 5 и 4, а также 4 и 8. Заключая в скобки какие-нибудь числа, мы тем самым выражаем мысль, что эти числа нужно сложить с н а ч а л а. Когда мы пишем в скобках $5 + 4$, то это значит, что нужно сначала 5 сложить с 4, а потом прибавить 8; во вторых скобках сначала 4 складывается с 8, а затем прибавляется 5.

Применим буквенное обозначение. Первое слагаемое обозначим буквой $a$, второе слагаемое — $b$ и третье слагаемое — буквой $c$. Тогда можно написать:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Слагаемых можно было бы взять не три, а больше.

## § 13. Сложение однозначных чисел.

Чтобы научиться складывать многозначные числа, надо сначала усвоить сложение однозначных чисел. Это необходимо потому, что при сложении многозначных чисел мы постоянно будем пользоваться своим умением складывать однозначные числа.

Прежде всего необходимо составить таблицу сложения однозначных чисел. Нужно взять единицу (1) и последовательно прибавить к ней все однозначные числа от 1 до 9.

После этого нужно взять двойку (2) и опять прибавить к ней все числа от 1 до 9, затем взять тройку, четвёрку и т. д. и прибавить к ним однозначные числа от 1 до 9. Последним числом, с которым придётся складывать однозначные числа, будет, конечно, число 9. Таким образом, в таблице получится 81 сумма. Эту таблицу вы изучали в начальной школе; её надо всегда помнить, чтобы каждый раз не пользоваться присчитыванием.

Таблица сложения даёт возможность складывать не только единицы, но и десятки, сотни, тысячи и т. д. Пусть требуется сложить 10 и 10. Будем рассуждать так: один десяток да ещё один десяток составят два десятка. Запишем цифрами:

$$10 + 10 = 20.$$

Точно так же, если требуется сложить 200 и 300, то мы сложим 2 и 3, а затем к сумме 5 припишем два нуля:

$$200 + 300 = 500.$$

## § 14. Письменное сложение многозначных чисел.

1. Сложим трёхзначные числа: $123 + 234$.

Разложим эти числа на разряды:

$$100 + 20 + 3 + 200 + 30 + 4.$$

Теперь соберём в одну группу сотни, в другую — десятки и в третью — единицы:

$$(100 + 200) + (20 + 30) + (3 + 4).$$

Складывая сотни с сотнями, десятки с десятками и единицы с единицами, получим:

$$\begin{aligned} 100 + 200 &= 300, \\ 20 + 30 &= 50, \\ 3 + 4 &= 7. \end{aligned}$$

А складывая окончательно сотни, десятки и единицы, получим:

$$123 + 234 = 357.$$

2. Сложим ещё два трёхзначных числа: $126 + 348$.

Поступим так же, как и в предыдущем случае:

$$100 + 20 + 6 + 300 + 40 + 8,$$

или

$$(100 + 300) + (20 + 40) + (6 + 8).$$

Сложим по разрядам:

$$\begin{aligned} 100 + 300 &= 400, \\ 20 + 40 &= 60, \\ 6 + 8 &= 14. \end{aligned}$$

Теперь остаётся только найти окончательную сумму. Мы поступим так: один десяток, получившийся от сложения единиц, прибавим к десяткам, которых у нас имеется 6, так как от сложения десятков получилось 60. Значит, нам нужно сложить:

$$400 + 60 + 10 + 4 = 474.$$

Легко заметить, что при выполнении сложения мы опирались на переместительный и сочетательный законы и правила десятичной нумерации.

На этих двух примерах мы показали, как выполняется сложение чисел. Необходимо помнить, что сложение двузначных, трёхзначных и вообще многозначных чисел выполняется *по разрядам*. Однако форма записи, которой мы пользовались, является неудобной, и мы перейдём к той форме записи, которой и принято пользоваться при сложении больших чисел во всех практических вычислениях. В этом случае записывают слагаемые одно под другим.

Рассмотрим ряд примеров:

$$
\text{а)}\ \begin{array}{r} 352 \\ +\,634 \\ \hline 986 \end{array}
\qquad
\text{б)}\ \begin{array}{r} 2450 \\ +\,328 \\ \hline 2778 \end{array}
\qquad
\text{в)}\ \begin{array}{r} {}^{1}\ \ \\ 213 \\ +\,123 \\ 456 \\ \hline 792 \end{array}
\qquad
\text{г)}\ \begin{array}{r} 673 \\ 5928 \\ +\,3627 \\ 1492 \\ \hline 11720 \end{array}
$$

В примере «в» от сложения единиц получилось 12, т. е. один десяток и две единицы; две единицы мы подписали под единицами, а один десяток надписали над столбцом десятков и потом присчитали к десяткам. Можно этот десяток не надписывать, а держать в памяти.

**Проверка сложения.** Сложение можно проверить сложением, для этого следует переставить слагаемые и снова их сложить. О другом способе проверки сложения будет сказано ниже (стр. 50).

## § 15. Прибавление суммы к числу и прибавление числа к сумме.

1. В практике вычислений часто требуется *к одному* числу *прибавить сумму* нескольких чисел. Пусть, например, требуется к числу 1 234 прибавить сумму таких чисел: 123 + + 234 + 345, т. е. 702.

Выполним это:

$$1\,234 + 702 = \mathbf{1\,936}.$$

Однако можно к данному числу 1 234 последовательно прибавить отдельные слагаемые этой суммы, т. е.

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\ 1\,234 + 123 = 1\,357,\\
&\text{б)}\ 1\,357 + 234 = 1\,591,\\
&\text{в)}\ 1\,591 + 345 = \mathbf{1\,936}.
\end{aligned}
$$

Результат получился тот же самый.

**Чтобы прибавить к какому-нибудь числу сумму нескольких чисел, достаточно прибавить к этому числу первое слагаемое, к полученной сумме прибавить второе слагаемое и т. д.**

2. Пусть требуется к имеющейся *сумме* чисел: 123 + 234 + + 345 + 456 + 567 + 789 = 2 514 *прибавить число* 6 543. Выполним это, т. е. прибавим к сумме 2 514 число 6 543:

$$2\,514 + 6\,543 = 9\,057.$$

Но можно было бы тот же результат найти иначе: число 6 543 можно прибавить к любому из данных чисел, а остальные числа без всякого изменения прибавить к полученной сумме двух чисел:

а) $123 + 6\,543 = 6\,666$.

б) $6\,666+(234+345+456+567+789) = 6\,666+2\,391=9\,057$.

**Чтобы прибавить какое-нибудь число к сумме нескольких слагаемых, достаточно прибавить это число к какому-нибудь одному слагаемому, оставив другие без изменения.**

## § 16. Устное сложение.

В предыдущих параграфах мы изложили всё, что относится к письменному сложению. Сделаем теперь несколько замечаний относительно устного сложения.

При устном сложении мы будем опираться на те же самые правила и законы, на которых основано и письменное сложение. Но для устного выполнения действия нужно выработать навык быстрого и сознательного применения этих законов к данным числам в уме, а не на бумаге.

Очевидно, что многозначные числа в уме складывать трудно и поэтому их приходится записывать.

Сложение однозначных чисел нужно знать наизусть (помнить). В этом случае не делается ни устных, ни письменных вычислений.

Сложение двузначных чисел рекомендуется выполнять в уме. В уме же можно иногда выполнять сложение и трёхзначных чисел.

1. Сложим 20 и 34. Будем рассуждать так: представим второе слагаемое как сумму $30 + 4$ и выполним сложение следующим образом: $(20 + 30) + 4$, т. е.

$$20 + 30 = 50, \text{ затем } 50 + 4 = 54.$$

2. Сложим 42 и 56. Представим каждое слагаемое как сумму десятков и единиц ($40 + 2$ и $50 + 6$). Будем складывать 40 и 50, получим 90; затем 2 и 6, получим 8 и, наконец, сложив 90 и 8, получим 98.

3. Сложим ещё 78 и 24. Сделаем немного короче, чем прежде. Не изменяя первого слагаемого, представим второе как сумму 20 и 4. Тогда можно сначала к 78 прибавить 20, получим 98, а затем к 98 ещё прибавить 4. Всего будет 102.

4. $574 + 325 = 500 + 300 + 74 + 25 = 899$.

5. Сложим 48 и 35. Округлим первое слагаемое до 50, а потом от полученной суммы отнимем 2, т. е.

$$48 + 35 = 50 + 35 - 2 = 85 - 2 = 83.$$

Этот приём называется приёмом округления.

6. При устном сложении нескольких чисел часто полезно опираться на переместительный закон сложения. Пусть требуется сложить три числа: $23 + 59 + 17$.

Чтобы скорее сложить эти числа, следует переставить слагаемые так:

$$23 + 17 + 59.$$

Тогда первые два слагаемых сразу дают в сумме 40 и остаётся выполнить одно сложение:

$$40 + 59 = 99.$$

Перестановка слагаемых делается, конечно, в уме.

Общий приём устного сложения состоит в том, что разбивают слагаемые на разряды и выполняют сложение, начиная с высших разрядов.

## § 17. Простейшие случаи сложения на счётах.

Сложение чисел удобно выполнять на счётах. Покажем простейшие случаи сложения, а в будущем рассмотрим и все остальные случаи.

1. Сложить 23 и 32. Первое слагаемое (23) откладывается так: на второй проволоке откладываем 2 косточки (два десятка) и на первой проволоке откладываем 3 косточки (три единицы). Второе слагаемое откладываем подобным же образом: на второй проволоке — 3 косточки и на первой — 2 косточки. В левой стороне счётов у нас получилось: на второй проволоке 5 косточек (5 десятков) и на первой проволоке тоже 5 косточек (5 единиц). Значит, искомая сумма будет 55, т. е. $23 + 32 = 55$.

2. Сложить 135 и 252. Будем объяснять короче.

Первое слагаемое: на третьей проволоке откладываем 1 косточку, на второй — 3 косточки, на первой — 5 косточек.

Второе слагаемое: на третьей проволоке откладываем 2 косточки, на второй — 5 косточек, на первой — 2 косточки. Итог: 387, т. е. $135 + 252 = 387$.

3. Сложить 52 314 и 5 362.

Первое слагаемое: на пятой проволоке откладываем 5 косточек, на четвёртой — 2, на третьей — 3, на второй — 1, на первой — 4.

Второе слагаемое: на четвёртой проволоке откладываем 5 косточек, на третьей — 3, на второй — 6 и на первой — 2. Итог: 57 676, т. е. $52\,314 + 5\,362 = 57\,676$.

## ВЫЧИТАНИЕ.

### § 18. Понятие о вычитании.

Рассмотрим задачу: «Стекольщик остеклил рамы нового дома. В первый день он остеклил 9 рам, а во второй день — остальные 6 рам. Сколько рам он остеклил в течение двух дней?»

Эта задача решается посредством сложения:

$$9 + 6 = 15.$$

Здесь были даны два слагаемых 9 и 6 и по ним вычислена их сумма 15.

Теперь изменим нашу задачу следующим образом: стекольщик, который получил заказ остеклить рамы в новом доме, прежде всего поинтересовался, сколько рам, и выяснил, что их 15; таким образом, сумма была известна ему заранее. Далее, когда он в первый день остеклил 9 рам, перед ним возник вопрос: сколько рам ему остаётся сделать завтра?

В этом случае ему не надо делать сложение, не надо искать сумму, так как он её знает, ему нужно найти *остаток*, а остаток находится другим действием, которое состоит в том, чтобы от данной суммы отсчитать *известное* слагаемое.

Рассмотрим ещё одну задачу: «Уезжая на юг в отпуск, я взял с собой 20 почтовых конвертов. С юга я отослал 12 писем родным и знакомым. Сколько у меня осталось неиспользованных конвертов?»

Нетрудно от общего числа конвертов (20) мысленно отделить число израсходованных (12) и получить остаток, т. е. число конвертов, оставшихся неиспользованными (8).

И в этой задаче было дано общее число предметов — их сумма (20), указано одно слагаемое, т. е. число израсходованных предметов (12), а требовалось найти число оставшихся предметов, или второе слагаемое (8), т. е. $20 - 12 = 8$.

Подобные задачи решаются *вычитанием*. Следовательно, **вычитанием называется действие, посредством которого по данной сумме и одному данному слагаемому отыскивается другое слагаемое.**

Во второй задаче из числа 20 нужно было вычесть число 12. Число 8, которое получится в результате этого действия, и будет ответом на вопрос задачи.

Число, из которого вычитают, называется **уменьшаемым.** Число, которое вычитают, называется **вычитаемым.** Число, которое получается в результате действия, называется **разностью.**

Вычитание представляет собой действие, которое возможно в тех случаях, когда вычитаемое не больше уменьшаемого.

Если сравнить вычитание со сложением, то получится следующий вывод: при сложении даются слагаемые (например, $10 + 5$), а ищется сумма (15), при вычитании же даётся сумма и одно из слагаемых (15 и, например, 10), а ищется второе слагаемое (5). Таким образом, число, которое при сложении является искомым, при вычитании оказывается данным, и наоборот. Поэтому вычитание называют действием, обратным сложению.

Замечания. 1. Вычитание нуля из числа не изменяет этого числа, т. е. $5 - 0 = 5$.

2. Если уменьшаемое равно вычитаемому, то разность равна нулю, например $10 - 10 = 0$.

## § 19. Основные свойства вычитания.

**Первое свойство.** Рассмотрим такой пример. Если от числа 11 надо отнять сумму двух чисел: 2 и 3, то можно поступить двумя способами. 1) Сначала найти эту сумму ($2 + 3 = 5$), а потом вычесть её из 11, т. е. сделать так: $11 - (2 + 3) = 11 - 5 = 6$. 2) Но можно поступить иначе. Не находить сумму 2 и 3, а сделать последовательно два вычитания, т. е. сначала вычесть из одиннадцати 2, а из полученного результата вычесть 3, т. е.

$$11 - (2 + 3) = 11 - 2 - 3 = 9 - 3 = 6.$$

Вывод. **Чтобы вычесть сумму из числа, достаточно вычесть из этого числа первое слагаемое, из полученной разности — второе слагаемое и т. д.**

Это и есть первое свойство вычитания. Обозначим уменьшаемое буквой $a$, отдельные слагаемые вычитаемой суммы буквами $b$ и $c$; тогда первое свойство можно будет записать так:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

**Второе свойство.** Рассмотрим такой пример. Если из суммы $10 + 5$ нужно вычесть 4, то можно поступить двумя способами. 1) Сначала найти эту сумму и потом вычесть из неё 4, т. е. $10 + 5 = 15$; $15 - 4 = 11$. 2) Или поступить так: вычесть 4 из какого-нибудь слагаемого, оставляя другое без изменения:

$$(10 + 5) - 4 = (10 - 4) + 5 = 10 + (5 - 4) = 11.$$

В этом и состоит второе свойство вычитания, которое словами можно высказать так: **чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из какого-нибудь одного слагаемого** (предполагается, что слагаемое больше вычитаемого).

Запишем теперь это свойство с помощью букв:

$$(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$$

## § 20. Вычитание однозначных чисел.

Для того чтобы научиться выполнять вычитание многозначных чисел, нужно сначала усвоить вычитание однозначных чисел из однозначных или двузначных, когда разностью является однозначное число. Это можно сделать так. Сначала будем заниматься вычитанием единицы, потом вычитанием двойки, затем — тройки и т. д.

У нас получится таблица вычитания, которая возникает из таблицы сложения, только здесь на первом месте стоит сумма, из неё вычитается одно слагаемое, а после знака равенства будет второе слагаемое. Эту таблицу надо знать наизусть.

Пользуясь этой таблицей, мы можем не только вычитать однозначные числа и получать однозначную разность, но выполнять вычитание единиц высших разрядов, т. е. десятков, сотен и т. д. В самом деле, вычтем из 5 десятков 2 десятка, получим 3 десятка. Это можно записать цифрами: $50 - 20 = 30$.

## § 21. Письменное вычитание многозначных чисел.

1. Возьмём для вычитания трёхзначные числа:

$$654 - 123$$

и, представив их как суммы разрядов:

$$(600 + 50 + 4) - (100 + 20 + 3),$$

будем вычитать по разрядам:

$$(600 - 100) + (50 - 20) + (4 - 3) = 500 + 30 + 1 = 531.$$

Или в столбик:

$$\begin{array}{r} -\,654 \\ 123 \\ \hline 531 \end{array}$$

2. Теперь рассмотрим случай более трудный: $782 - 437$. Трудность его состоит в том, что уменьшаемое содержит 2 единицы, а вычитаемое 7 и, следовательно, из единиц уменьшаемого нельзя вычесть единиц вычитаемого. В таком случае поступают следующим образом: берут, или, как говорят, «занимают», у 8 десятков один десяток, в нём содержится 10 единиц; если к ним присоединить 2 имеющиеся у нас единицы, то получим всего 12 единиц. Вычитая из 12 единиц 7, получим 5 единиц. Теперь остаётся вычесть десятки. У нас в уменьшаемом осталось 7 десятков, потому что один десяток мы раздробили в единицы. Значит, от 7 десятков нужно отнять 3, получим 4 десятка.

Запишем это:

$$\begin{array}{r} -\,7\dot{8}2 \\ 437 \\ \hline 345 \end{array}$$

Над цифрой 8 поставлена точка, которая должна напоминать о том, что от этого числа мы «занимали» единицу. (Эту точку можно не ставить.) Остаётся из 7 сотен вычесть 4 сотни.

Ответ. Разность равна 345.

## § 22. Проверка вычитания.

**Проверка сложением.** Вычитание можно проверить сложением на том основании, что уменьшаемое является суммой, а вычитаемое и разность — слагаемыми. Поэтому для проверки вычитания следует сложить вычитаемое с разностью. Если результат будет равен уменьшаемому, то весьма возможно, что действие сделано правильно.

Пример.

$$\begin{array}{r} -\,13968 \\ 9543 \\ \hline 4425 \end{array}$$

Проверка.

$$\begin{array}{r} +\,9543 \\ 4425 \\ \hline 13968 \end{array}$$

**Проверка вычитанием.** Так как уменьшаемое является суммой, а вычитаемое и разность — слагаемыми и, кроме того, от перестановки слагаемых сумма не меняется, то в целях проверки можно из уменьшаемого вычесть разность. Если после этого получится вычитаемое, то весьма возможно, что вычитание сделано правильно.

Пример.

$$\begin{array}{r} -\,23456 \\ 15432 \\ \hline 8024 \end{array}$$

Проверка.

$$\begin{array}{r} -\,23456 \\ 8024 \\ \hline 15432 \end{array}$$

## § 23. Прибавление и вычитание разности.

В практике вычислений бывают такие случаи, когда сложение и вычитание встречаются вместе. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть требуется к числу прибавить разность, например: к числу 123 прибавить разность чисел 78 и 56, т. е. 22. Выполним это действие:

$$123 + 22 = 145.$$

Однако можно было бы сначала к числу 123 прибавить уменьшаемое, а затем отнять вычитаемое, и результат получился бы тот же самый:

$$\text{а) } 123 + 78 = 201; \quad \text{б) } 201 - 56 = 145.$$

**Чтобы прибавить разность к числу, достаточно прибавить к нему уменьшаемое и из полученной суммы вычесть вычитаемое.**

В общем виде это можно записать так:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

2. Пусть требуется из числа в ы ч е с т ь  р а з н о с т ь, например: из 234 вычесть разность чисел 98 и 35, т. е. 63. Сначала вычтем эту разность из числа 234:

$$234 - 63 = 171.$$

Теперь поступим иначе: сначала от 234 отнимем 98 и к полученному результату прибавим 35:

а) $234 - 98 = 136$; б) $136 + 35 = 171$.

Почему это сделано? Мы должны были из 234 вычесть не 98, а 98 без 35. Когда мы сначала из числа 234 вычли 98, то оказалось, что мы вычли больше, чем следует, на 35 единиц. Значит, наш результат оказался на 35 единиц меньше, чем нужно. Чтобы восполнить этот недостаток, мы и прибавили к результату 35 единиц.

**Чтобы вычесть разность из числа, достаточно вычесть из него уменьшаемое** (если это возможно) **и к полученной разности прибавить вычитаемое.**

В общем виде это можно записать так:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

## § 24. Устное вычитание.

Рассмотрим несколько примеров устного вычитания.

1. Из 69 вычесть 45. Представим 45 как сумму 40 и 5; тогда можно будет написать: $69 - (40 + 5)$. Отнимая сначала от 69 число 40, получим 29; отнимая затем от 29 ещё 5, получим окончательный результат 24. Значит, $69 - 45 = 24$. Таким образом, мы начинали вычитание с в ы с ш и х разрядов.

2. Рассмотрим более сложный пример. Из 75 вычесть 47. Выполним вычитание следующим образом:

$$75 - 50 + 3 = 25 + 3 = 28.$$

Сначала, округлив 47 до 50, мы вычли из 75 лишних 3 единицы, а потом мы их прибавили.

3. Рассмотрим теперь такой случай вычитания. Пусть нужно от 100 отнять 86. Рассуждаем так: ближайшее следующее круг-

лое число к 86 есть 90, разница между ними 4, а от 90 до 100 ещё недостаёт 10. Значит, разность между 100 и 86 будет $4 + 10 = 14$. Мы сделали вычитание по способу дополнения.

4. Рассмотрим пример, при решении которого мы будем опираться на второе свойство вычитания (§ 19). Пусть нужно вычесть 26 из 114. Выделим в уменьшаемом сотню, т. е. представим этот пример так: $(100 + 14) - 26$. Вычтем 26 из 100, получим 74, а затем прибавим к 74 число 14, получим окончательно 88, т. е.

$$114 - 26 = 88.$$

5. Рассмотрим пример на сложение, при решении которого приходится пользоваться вычитанием: $34 + 47$.

Представим 47 как разность $50 - 3$, тогда у нас получится:

$$34 + 50 - 3 = 84 - 3 = 81.$$

Этим приёмом обычно пользуются в тех случаях, когда приходится прибавлять число, оканчивающееся на 6; 7; 8 или 9. Например:

$$367 + 198 = 367 + 200 - 2 = 567 - 2 = 565.$$

## § 25. Сложение и вычитание на счётах.

В § 17 были показаны простейшие случаи сложения на счётах. Перейдём к более сложным случаям.

1. Сложить 156 и 278. Откладываем на третьей, второй и первой проволоках слагаемое 156. Затем на третьей проволоке откладываем 2 сотни второго слагаемого. Отложить 7 десятков на второй проволоке мы не можем; тогда мы откладываем на третьей проволоке ещё одну сотню и сбрасываем со второй проволоки 3 десятка. Теперь переходим к единицам. Отложить на первой проволоке 8 единиц второго слагаемого мы не можем, тогда мы откладываем на второй проволоке один десяток и сбрасываем с первой проволоки 2 единицы. Получаем сумму 434, значит, $156 + 278 = 434$.

2. Сложить 2 536 и 5 829. Отложив первое слагаемое, постепенно отложим, руководствуясь сделанными выше указаниями, второе слагаемое. Получим 8 365.

Переходим к вычитанию.

1. Вычесть 1 234 из 9 876. Откладываем уменьшаемое 9 876 и последовательно сбрасываем с четвёртой, третьей, второй и первой проволок 1, 2, 3 и 4 косточки. Получаем: $9\,876 - 1\,234 = 8\,642$.

2. Вычесть 734 из 2 568. Откладываем уменьшаемое 2 568 и начинаем отнимать вычитаемое. Мы не можем с третьей проволоки сбросить 7 сотен; поэтому мы с четвёртой проволоки сбрасываем

1 тысячу, а на третьей проволоке прибавляем 3 сотни. Со второй проволоки сбрасываем 3 косточки и с первой 4. Получаем: 2 568 — — 734 = 1 834.

## УМНОЖЕНИЕ.

### § 26. Понятие об умножении.

Рассмотрим такой случай сложения:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 30.$$

Здесь 10 слагаемых, и все они одинаковы. Запись их занимает почти целую строку. А если бы слагаемых было больше 10, то пришлось бы занять несколько строк. Кроме того, складывать много слагаемых — дело утомительное, и при этом легко допустить ошибку. Если бы, например, пришлось число 456 сложить 123 раза, то это сложение продолжалось бы довольно долго. Такое сложение можно облегчить и упростить. Это делается так: сначала пишется один раз число, которое следует складывать с самим собой, а потом пишется число, показывающее, сколько должно быть слагаемых; между ними ставится косой крест. Например, если число 3 нужно повторить слагаемым 10 раз, то пишут: $3 \times 10 = 30$.

Мы получили особое действие над числами, которое называется у м н о ж е н и е м. Следовательно, **умножением называется действие, состоящее в нахождении суммы одинаковых слагаемых.**

Можно сказать иначе: умножить одно число (3) на другое (10)— это значит повторить первое число слагаемым столько раз, сколько единиц во втором числе.

Число, которое является слагаемым, называется **множимым**; число, которое указывает, сколько даётся таких одинаковых слагаемых, называется **множителем.** Результат действия, т. е. число, полученное при умножении, называется **произведением.** Множимое и множитель иногда называют одним словом **сомножители.**

Вместо косого крестика, которым мы пользовались в качестве знака умножения, часто употребляется точка (•), которая ставится между множимым и множителем. Например, $7 \cdot 5 = 35$. Если вместо цифр при умножении пишут буквы, то знак умножения можно не ставить: $a \cdot b = ab$.

Действие умножения всегда возможно и при данных сомножителях даёт единственный результат.

З а м е ч а н и я. 1. Если множимое равно единице (1), то произведение равно множителю ($1 \cdot 6 = 6$; так как $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$).

2. Если множитель равен единице, то произведение принимается равным множимому ($7 \cdot 1 = 7$).

3. Если множимое равно нулю (0), то произведение равно нулю ($0 \cdot 5 = 0$, так как $0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$).

4. Если множитель равен нулю (0), то произведение принимается равным нулю ( $5 \cdot 0 = 0$).

## § 27. Законы умножения.

В дальнейшем при умножении различных чисел мы будем опираться на три закона: переместительный, сочетательный и распределительный.

**1. Переместительный закон.** Возьмём два числа 3 и 4 и перемножим их. Перемножение этих чисел можно заменить сложением, т. е. $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$. Здесь у нас число 3 было множимым, а 4 — множителем. Если мы их переставим, то получим $4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$. Результат не изменился. Следовательно, при перемножении чисел мы можем изменять места сомножителей. В этом и состоит переместительный закон умножения, который можно высказать так: **произведение не изменяется от перемены мест сомножителей.**

Переместительный закон можно выразить кратко с помощью букв. Если обозначим первый сомножитель буквой $a$, а второй сомножитель буквой $b$, то переместительный закон запишется в виде такого равенства:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Если сомножителей больше двух, например три, то переместительный закон остаётся в силе:

$$abc = bac = acb \text{ и т. д.}$$

**2. Сочетательный закон.** Возьмём три числа: 3, 4 и 5 и перемножим их между собой. Сначала умножим первый сомножитель на второй (3 на 4), а потом полученное произведение умножим на третий сомножитель (на 5):

$$1)\ 3 \times 4 = 12; \quad 2)\ 12 \times 5 = 60.$$

С помощью скобок это можно записать так:

$$3 \times 4 \times 5 = (3 \times 4) \times 5 = 12 \times 5 = 60.$$

Значит, из трёх данных нам сомножителей мы сначала выделили группу, содержащую два сомножителя, нашли их произведение и умножили его на третий сомножитель.

Однако совершенно очевидно, что мы могли взять не эту пару чисел, а другую. Например, мы можем сначала умножить второй сомножитель на третий ($4 \times 5$) и на полученное произведение умножить первый сомножитель (3). С помощью скобок это можно записать так:

$$3 \times 4 \times 5 = 3 \times (4 \times 5) = 3 \times 20 = 60.$$

Результат получился тот же самый, но группировка сомножителей была иная: сначала мы соединили в группу первый сомножитель со вторым, а потом — второй с третьим. В этом и состоит второй закон умножения, который можно выразить так: **произведение не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей мы заменим их произведением.**

Этот закон называется сочетательным. Его название должно напоминать нам о том, что при умножении нескольких чисел сомножители можно соединять (сочетать) в группы.

В общем виде этот закон можно записать так:

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

**3. Распределительный закон.** Возьмём сумму двух чисел 12 и 6 и умножим её на 3. Это можно записать так:

$$(12 + 6) \times 3 = 18 \times 3 = 54.$$

Здесь мы сначала сложили числа, стоящие в скобках, получили $12 + 6 = 18$; затем сумму умножили на 3; получили $18 \times 3 = 54$. Но можно поступить иначе, а именно: сначала умножить на 3 первое слагаемое, затем второе и сложить эти произведения:

$$12 \times 3 = 36; \quad 6 \times 3 = 18; \quad 36 + 18 = 54.$$

Второй способ можно кратко записать так:

$$12 \times 3 + 6 \times 3 = 54.$$

Так как в обоих случаях получился один и тот же результат, то можно написать равенство:

$$(12 + 6) \times 3 = 12 \times 3 + 6 \times 3.$$

В этом и состоит распределительный закон умножения, который можно высказать так: **произведение суммы нескольких чисел на какое-нибудь число равно сумме произведений каждого слагаемого на это число.**

Запишем его в общем виде для случая трёх слагаемых:

$$(a + b + c)d = ad + bd + cd.$$

**4. Умножение разности на число.** Изложенное нами свойство распределительности относится не только к сложению, но и к вычитанию. Пусть требуется разность чисел 54 и 38, т. е. 16 умножить на число 18:

$$16 \times 18 = 288.$$

Сделаем вычисления иным путём:

а) $54 \times 18 = 972$; б) $38 \times 18 = 684$; в) $972 - 684 = 288$.

**Чтобы умножить разность на число, достаточно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и затем из первого произведения вычесть второе.**

В общем виде это можно записать так:

$$(a - b)c = ac - bc.$$

## § 28. Умножение однозначных чисел.

Необходимо составить таблицу умножения всех однозначных чисел на однозначные, выучить её наизусть и каждый раз пользоваться ею, когда в этом представляется надобность.

Значит произведения всех однозначных чисел на однозначные содержатся в таблице умножения.

Таблица умножения даёт возможность перемножать и многозначные числа, оканчивающиеся нулями, т. е. 10, 20, 30, ...; 100, 200, 300, ...; 1 000, 2 000, 3 000 и т. д., на любые однозначные числа. Умножим 10 на 3. Для этого заменим умножение сложением: $10 \times 3 = 10 + 10 + 10 = 30$. В результате у нас получилось 3 десятка.

Так же можно найти и другие произведения, например: $20 \times 4 = 80$; $30 \times 5 = 150$; $400 \times 4 = 1\,600$.

## § 29. Письменное умножение многозначных чисел.

Рассмотрим различные случаи умножения многозначных чисел.

1. **Умножение многозначного числа на однозначное.** Например:

$$236 \times 4.$$

Пользуясь распределительным законом умножения, мы можем представить 236 как сумму трёх слагаемых $(200 + 30 + 6)$, умножить отдельно сотни, десятки и единицы на 4 и полученные произведения сложить:

$$(200 + 30 + 6) \times 4 = 200 \times 4 + 30 \times 4 + 6 \times 4 =$$
$$= 800 + 120 + 24 = 944.$$

Однако такая запись умножения занимает много места. Поэтому принято начинать умножение с низших разрядов, а промежуточные вычисления выполнять в уме:

$$236 \times 4 = 944.$$

При этом нужно рассуждать следующим образом. Начинаем умножение с единиц и говорим: $4 \times 6 = 24$; число 4 пишем, а 2 десятка запоминаем, чтобы потом прибавить их к произведению десятков; 3 десятка умножаем на 4, будет 12 десятков, да 2 — всего 14 десятков; 4 десятка пишем, а 10 десятков, т. е. сотню, запоминаем, чтобы потом присоединить к сотням; 2 сотни умножаем на 4, будет 8 сотен, да ещё 1 сотня — всего 9 сотен.

**2. Умножение многозначного числа на число, обозначаемое единицей с нулями.** Возьмём небольшое число, например 16, и умножим его на 10. Так как слагаемых не очень много, то можно заменить умножение сложением:

$$16 \times 10 = 16+16+16+16+16+16+16+16+16+16=160.$$

Таким образом, $16 \times 10 = 160$. Мы видим, что это действие свелось к умножению 16 на единицу и к приписыванию нуля.

Умножение на 100, на 1 000 и т. д. будет состоять в приписывании к множимому двух, трёх, четырёх и т. д. нулей.

Например:

$$23 \times 100 = 2\,300,$$
$$83 \times 1\,000 = 83\,000.$$

**3. Умножение многозначного числа на число, у которого все цифры, кроме цифры высшего разряда, — нули.** (Эти числа иногда называются «круглыми».) Умножим, например, 25 на 30. Для этого достаточно 25 умножить на 3 и к произведению приписать нуль:

$$25 \times 30 = 750.$$

Ещё пример: $125 \times 800$. Нужно 125 умножить на 8 и приписать два нуля. Значит:

$$125 \times 800 = 100\,000.$$

**4. Умножение многозначного числа на многозначное.**

Умножим 618 на 325:

$$\begin{array}{r} \times\, 618 \\ 325 \\ \hline 3090 \\ +\ 1236\phantom{0} \\ 1854\phantom{00} \\ \hline 200850 \end{array}$$

Здесь множитель — трёхзначное число. Поэтому сначала мы умножили множимое на е д и н и ц ы множителя ($618 \times 5$) и получили первое промежуточное произведение 3 090; потом умножили множимое на д е с я т к и множителя ($618 \times 2$), получили второе промежуточное произведение 1 236 и начали подписывать его под десятками первого; затем умножили множимое на с о т н и множителя ($618 \times 3$), получили третье промежуточное произведение 1 854 и начали подписывать его под сотнями первых. Наконец, мы сложили три промежуточных произведения и нашли общее произведение — 200 850.

Умножим 642 на 305:

$$\begin{array}{r} \times\ 642 \\ 305 \\ \hline 3210 \\ +\ 000\phantom{0} \\ 1926\phantom{00} \\ \hline 195810 \end{array}$$

Здесь мы остановимся только на особенностях этого случая. Число 305, являющееся множителем, имеет нуль на месте десятков. На этот нуль мы тоже умножали множимое 642 и получили второе промежуточное произведение, равное нулю. Оно обозначено у нас тремя нулями, потому что мы рассуждали так:

$$642 \times 0 = 0, \text{ так как } 2 \times 0 = 0;\ 4 \times 0 = 0 \text{ и } 6 \times 0 = 0.$$

Из последнего примера мы сделаем выводы:

а) Промежуточное произведение нужно начинать подписывать под той разрядной единицей, на которую производится умножение, например, крайняя правая цифра 6 третьего произведения подписана под сотнями, потому что она получилась от умножения на сотни.

б) Нули, поставленные на месте второго промежуточного произведения, писать не следует, но нужно помнить, что крайняя правая цифра третьего произведения должна стоять под сотнями, а не под десятками, значит, общепринятая запись будет иметь вид:

$$\begin{array}{r} \times\ 642 \\ 305 \\ \hline 3210 \\ +\ 1926\phantom{00} \\ \hline 195810 \end{array}$$

**Проверка умножения.** Умножение можно проверить умножением; для этого следует переставить сомножители и снова их перемножить:

$$\begin{array}{r} \times\ 123 \\ 456 \\ \hline 738 \\ +\ 615\phantom{0} \\ 492\phantom{00} \\ \hline 56088 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 456 \\ 123 \\ \hline 1368 \\ +\ 912\phantom{0} \\ 456\phantom{00} \\ \hline 56088 \end{array}$$

О другом способе проверки умножения будет сказано ниже (стр. 52).

## § 30. Умножение числа на произведение и умножение произведения на число.

В практике умножения могут встретиться следующие случаи.

**1. Умножение числа на произведение.** Пусть требуется число 12 умножить на произведение трёх чисел: $15 \times 16 \times 18$, т. е. на 4 320. Выполним сначала это умножение:

$$12 \times 4\,320 = 51\,840.$$

Теперь попробуем выполнить умножение последовательно, т. е.

а) $12 \times 15 = 180$; б) $180 \times 16 = 2\,880$; в) $2\,880 \times 18 = 51\,840$.

Получился тот же самый результат. Следовательно, **чтобы умножить число на произведение нескольких чисел, достаточно умножить его на первый сомножитель, полученное произведение умножить на второй сомножитель, затем на третий и т. д.**

**2. Умножение произведения на число.** Пусть требуется произведение $3 \times 5 \times 8 = 120$ умножить на число 12.

Умножив это произведение на 12, получим: $120 \times 12 = 1\,440$. Это и есть искомый результат.

Теперь попробуем выполнить умножение иначе:

$$\text{а) } (3 \times 12) \times 5 \times 8 = 1\,440,$$
$$\text{б) } (5 \times 12) \times 3 \times 8 = 1\,440,$$
$$\text{в) } (8 \times 12) \times 3 \times 5 = 1\,440.$$

Во всех случаях получился один и тот же результат. Следовательно, **чтобы умножить произведение на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения.**

## § 31. Устное умножение.

1. Умножим устно 48 на 3; для этого представим 48 как сумму десятков и единиц, т. е. $40 + 8$. Затем, опираясь на распределительный закон умножения, умножим отдельно 40 на 3, получим 120, и 8 на 3, получим 24; сложим 120 и 24. Окончательный результат умножения выразится числом 144.

Таким образом, при устном умножении множимое разбивают на разряды и умножают отдельно каждый разряд, начиная с высшего, полученные отдельные произведения потом складывают.

2. Умножение двузначного числа на двузначное можно выполнить следующим образом. Пусть требуется умножить 15 на 12. Представим 12 как сумму 10 и 2, т. е. напишем:

$$15 \times (10 + 2)$$

Значит, мы можем сначала 15 умножить на 10, будет 150, затем 15 умножить на 2, будет 30, и, наконец, сложить $150 + 30 = 180$.

В этом случае можно было бы применить способ последовательного умножения, а именно представить 12 как произведение $4 \times 3$, тогда решение запишется так:

$$15 \times 12 = 15 \times 4 \times 3 = (15 \times 4) \times 3 = 60 \times 3 = 180.$$

Ещё пример:

$$15 \times 16 = 15 \times (10 + 6) = 150 + 90 = 240,$$

или

$$15 \times 16 = 15 \times 4 \times 4 = (15 \times 4) \times 4 = 60 \times 4 = 240,$$

или ещё иначе

$$15 \times 16 = (10 + 5) \times 16 = 160 + 80 = 240.$$

3. Устное умножение трёхзначного числа на однозначное можно выполнить так:

$$532 \times 3 = (500 + 30 + 2) \times 3 = 1\,500 + 90 + 6 = 1\,596.$$

4. Иногда при умножении можно один из сомножителей представить в виде разности, например:

$$23 \times 18 = 23 \times (20 - 2) = 23 \times 20 - 23 \times 2 = 460 - 46 = 414.$$

## § 32. Умножение на счётах.

Так как умножение на целое число представляет собой сложение одинаковых слагаемых, то умножение на счётах может быть сведено к повторному прибавлению множимого столько раз, сколько единиц во множителе. Однако этот процесс будет протекать довольно медленно, особенно в тех случаях, когда множителем является сравнительно большое число. Поэтому нужно запомнить несколько особых приёмов, значительно ускоряющих процесс вычисления.

Прежде всего рассмотрим умножение на разрядную единицу (10, 100, 1 000, 10 000 и т. д.).

Чтобы умножить на число, изображаемое единицей с нулями, нужно отложить на счётах множимое на столько проволок выше, сколько во множителе нулей.

Пример. $567 \times 100$.

Чтобы умножить 567 на 100, нужно отложить это число на две проволоки выше, т. е. начать с пятой проволоки, на которой будет отложено 5 косточек, а остальные цифры (6 и 7) отложить на четвёртой и третьей проволоках. Отложенное число и даёт нам искомое произведение, т. е. 56 700.

При выполнении умножения на различные числа нам часто придётся выполнять деление на 2. Это такой подсобный приём, который нередко облегчает умножение. Поэтому сейчас мы рассмотрим деление чисел на 2, хотя этот вопрос относится не к умножению, а к делению.

Пример 1. Разделить 2 468 на 2.

Деление выполняется так. Откладывают делимое 2 468 и затем сбрасывают с каждой проволоки половину косточек, начиная с низшего разряда. Получится 1 234.

Пример 2. Разделить 2 654 на 2.

В этом числе 5 десятков, а 5 на 2 не делится, поэтому здесь нужно поступать так: на первой проволоке нужно сбросить половину косточек, т. е. 2, на второй проволоке нужно сбросить 3 косточки, т. е. 3 десятка, но так как здесь мы сбрасываем 5 лишних единиц, то необходимо сейчас же на первой проволоке прибавить 5 косточек (5 единиц). Затем на третьей проволоке нужно сбросить 3 косточки и на четвёртой — одну.

Значит, деление на 2 выполняется следующим образом: откладывают делимое и на каждой проволоке сбрасывают половину косточек, идя от низших разрядов к высшим; в тех случаях, когда приходится сбрасывать одну лишнюю косточку, восполняют этот излишек пятью косточками ближайшего низшего разряда.

Теперь приступим к умножению чисел на счётах.

Пример 1. 367 умножить на 2.

При умножении числа на 2 нужно отложить его на счётах два раза. Значит, умножение заменяется сложением, т. е.

$$367 \times 2 = 367 + 367 = 734.$$

Пример 2. 372 умножить на 3.

Умножение числа на 3 тоже заменяется сложением, значит, чтобы умножить число на 3, нужно отложить его на счётах три раза:

$$372 \times 3 = 372 + 372 + 372 = 1\,116.$$

Пример 3. 286 умножить на 4.

Чтобы умножить число на 4, нужно сначала отложить его два раза, а затем к полученному числу прибавить результат первого сложения:

$$286 \times 4 = 286 + 286 + 572 = 1\,144.$$

Пример 4. 356 умножить на 5.

Чтобы умножить число на 5, нужно сначала умножить его на 10, т. е. отложить на одну проволоку выше, а затем полученный результат разделить на 2:

$$356 \times 5 = (356 \times 10) : 2 = 1\,780.$$

Пример 5. 248 умножить на 6.

Чтобы умножить число на 6, нужно сначала умножить его на 5 и к полученному результату прибавить множимое.

$$248 \times 6 = 248 \times 5 + 248 = 1\,488.$$

Пример 6. 356 умножить на 7.

Чтобы умножить число на 7, нужно сначала умножить его на 5 и к полученному результату два раза прибавить множимое.

$$356 \times 7 = 356 \times 5 + 356 + 356 = 2\,492.$$

Пример 7. 345 умножить на 8.

Чтобы умножить число на 8, нужно сначала умножить его на 10 и из полученного произведения вычесть два раза множимое.

$$345 \times 8 = 345 \times 10 - 345 - 345 = 2\,760.$$

Пример 8. 284 умножить на 9.

Чтобы умножить число на 9, нужно сначала умножить его на 10 и из полученного произведения вычесть множимое.

$$284 \times 9 = 284 \times 10 - 284 = 2\,556.$$

Умножение на числа второго десятка выполняется так: сначала умножают на единицы, как указано выше, а затем к полученному произведению прибавляют произведение множимого на 10, т. е. откладывают его на одну проволоку выше. Например: $142 \times 11$. Откладываем на счётах множимое один раз, а затем прибавляем то же число на одну проволоку выше, т. е. умножаем его на 10:

$$142 + (142 \times 10) = 1\,562.$$

## § 33. Умножение с помощью таблиц.

Для ускорения вычислений часто пользуются таблицами. Существуют, например, таблицы умножения двузначных чисел на двузначные. Чтобы объяснить, как ими пользоваться, рассмотрим таблицу, где даются произведения числа 53 на числа от 1 до 30.

**53**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 53 | 11 | 583 | 21 | 1113 |
| 2 | 106 | 12 | 636 | 22 | 1166 |
| 3 | 159 | 13 | 689 | 23 | 1219 |
| 4 | 212 | 14 | 742 | 24 | 1272 |
| 5 | 265 | 15 | 795 | 25 | 1325 |
| 6 | 318 | 16 | 848 | 26 | 1378 |
| 7 | 371 | 17 | 901 | 27 | 1431 |
| 8 | 424 | 18 | 954 | 28 | 1484 |
| 9 | 477 | 19 | 1007 | 29 | 1537 |
| 10 | 530 | 20 | 1060 | 30 | 1590 |

Объясним, как нужно пользоваться этой таблицей.

П р и м е р 1. Умножим 53 на 24. Множимое у нас равно 53, оно напечатано сверху; множитель 24 найдём в одном из вертикальных столбцов таблицы, направо от него в этой же строке мы увидим искомое произведение 1 272.

П р и м е р 2. Умножить 53 на 27. Множимое напечатано сверху, а множитель 27 найдём в одном из вертикальных столбцов таблицы. Искомое произведение стоит справа от множителя в той же строке. Оно равно 1 431.

С помощью этой маленькой таблицы можно найти произведение числа 53 на любое число от 1 до 30. Если нужно умножить, например, 48 на 76, то нужно в справочнике разыскать либо страницу с числом 48 сверху, либо страницу с числом 76 сверху.

Кроме этих таблиц, существуют более полные, но уже значительно бо́льшие по объёму таблицы умножения.

## ДЕЛЕНИЕ.

### § 34. Понятие о делении.

Рассмотрим задачу: «Столяр делает ежедневно 5 оконных рам. Сколько рам он сделает в течение 6 дней?»

Эта задача решается умножением:

$$5 \times 6 = 30 \quad \text{(рам)}.$$

Теперь изменим условие задачи следующим образом: «Столяр сдал 30 готовых оконных рам. Каждый день он делал по 5 рам. Сколько дней он затратил на эту работу?»

Сравним эти две задачи. В первой задаче были известны сомножители, а найти требовалось произведение.

Во второй задаче дано произведение, т. е. 30, и один из сомножителей (5), а найти нужно второй сомножитель.

Подобные задачи решаются посредством действия, называемого д е л е н и е м, т. е. $30 : 5 = 6$ (дней).

Следовательно, **делением называется действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель.**

В нашей задаче число 30 нужно разделить на 5, в результате получится 6. Число, которое делят, называется **делимым**; число, на которое делят, называется **делителем**; число, которое получается в результате деления, называется **частным.**

Если сравнить деление с умножением, то получим следующий вывод: при умножении даются два числа (например, $8 \times 3$), а отыскивается их произведение (24); при делении даётся произведение

(24) и один из сомножителей (например, 8), а отыскивается другой сомножитель (3). Таким образом, число, которое при умножении является искомым, при делении оказывается данным, и наоборот. Поэтому деление называют действием, обратным умножению.

Замечания. 1. Если делимое равно делителю, то частное равно единице ($9 : 9 = 1$).

2. Если делитель равен единице (1), то частное равно делимому ($12 : 1 = 12$).

3. Деление на нуль (0) невозможно.

В самом деле, если делимое равно какому-нибудь числу, например 12, то разделить его на нуль значило бы найти такое число, которое после умножения на нуль дало бы 12, но такого числа нет, потому что всякое число после умножения на нуль даёт нуль. Если же делимое само равно нулю, то, разделив его на нуль, мы получим неопределённое частное, потому что любое число, умноженное на нуль, даёт в произведении нуль. Значит, нуль не может быть делителем.

Деление, о котором мы сейчас говорили, можно назвать **точным делением.** Такое деление не всегда возможно. Например, нельзя говорить о точном делении числа 17 на число 5, потому что нет такого целого числа, которое при умножении на 5 давало бы 17. Поэтому от точного деления, о котором было сказано выше, следует отличать **деление с остатком.**

Именно с этим случаем деления мы и встречаемся при попытке разделить 17 на 5. Сколько получится в каждой части, если мы разделим 17 на 5 равных частей? В каждой части получится 3 единицы и сверх того останется 2 лишних единицы. В этом случае употребляются следующие наименования чисел: 17 по-прежнему называется делимым, 5 — делителем, 3 — приближённым частным, а число 2 — остатком от деления.

## § 35. Основные свойства деления.

**Первое свойство.** Допустим, что нам нужно разделить на 2 сумму чисел 4 и 6. Это можно записать так:

$$(4 + 6) : 2.$$

Можно было бы сначала выполнить сложение, а затем деление, т. е.:

$$1)\ 4 + 6 = 10;\quad 2)\ 10 : 2 = 5.$$

Но тот же самый результат мы можем найти и другим путём: сначала каждое слагаемое разделим на 2, а потом сложим результаты, т. е.:

$$1)\ 4 : 2 = 2;\quad 2)\ 6 : 2 = 3;\quad 3)\ 2 + 3 = 5.$$

Результат получился тот же самый. Его можно записать следующим образом:

$$(4 + 6) : 2 = 4 : 2 + 6 : 2 = 2 + 3 = 5.$$

Это свойство можно высказать так: **чтобы разделить сумму на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число каждое слагаемое отдельно и полученные частные сложить.** (Предполагается, что все деления выполняются без остатка.)

Это свойство справедливо для любых чисел. При помощи букв его можно записать так:

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

**Второе свойство.** Пусть требуется разделить на 3 разность чисел: 18 и 6. Это можно записать с помощью скобок так:

$$(18 - 6) : 3.$$

Найдём сначала разность чисел, заключённых в скобки, а потом сделаем деление:

1) $18 - 6 = 12$; 2) $12 : 3 = 4$.

Теперь попробуем решить этот пример иным путём: разделим сначала на 3 уменьшаемое (18), потом разделим на 3 вычитаемое (6) и из первого частного вычтем второе.

1) $18 : 3 = 6$; 2) $6 : 3 = 2$; 3) $6 - 2 = 4$.

Результат получился тот же самый; его можно записать следующим образом:

$$(18 - 6) : 3 = 18 : 3 - 6 : 3 = 6 - 2 = 4.$$

Это свойство можно высказать так: **чтобы разделить разность на какое-нибудь число, достаточно отдельно разделить на это число уменьшаемое и вычитаемое, а потом из первого частного вычесть второе.** (Предполагается, что и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на это число без остатка.)

При помощи букв это свойство можно записать так:

$$(a - b) : c = a : c - b : c.$$

## § 36. Деление многозначных чисел.

Рассмотрим различные случаи деления.

**Случай однозначного делителя.** Мы можем, представив делимое как сумму, разделить каждое слагаемое отдельно.

а) $864 : 2 = (800 + 60 + 4) : 2 = 400 + 30 + 2 = 432$,

б) $936 : 9 = (900 + 36) : 9 = 100 + 4 = 104$.

Обычно промежуточные вычисления выполняют в уме (устно) и записывают сразу частное:

$$936 : 9 = 104; \quad 124 : 4 = 31 \text{ и т. п.}$$

**Случай многозначного делителя.** При делении числа на многозначный делитель могут в свою очередь представиться два случая: 1) когда частное будет однозначным; 2) когда частное оказывается многозначным.

Прежде чем перейти к рассмотрению этих случаев, разрешим такой вопрос. Как заранее узнать, когда в частном получается однозначное число и когда неоднозначное? Пусть требуется разделить 256 на 32. Умножим делитель 32 на 10, получим 320. Теперь сравним делимое 256 с числом 320. Число 256 меньше 320. Это пишется так: $256 < 320$.

Значит, от деления 256 на 32 должно получиться число, меньшее десяти, т. е. однозначное число.

Рассмотрим другой пример: 516 : 43. Умножим делитель 43 на 10, получим 430. Здесь делимое 516 больше 430. Это пишется так: $516 > 430$.

Значит, частное от деления 516 на 43 не может быть однозначным числом.

1) Частное однозначное. Разделим 2 244 на 374. Сначала определим число цифр частного. $374 \times 10 = 3\,740$. Данное число $2\,244 < 3\,740$, значит, частное однозначное, т. е. оно заключено между нулём (0) и десятью (10). Как сообразить, чему оно равно? Рекомендуется мысленно отбросить в делителе справа столько цифр, чтобы в нём осталась только одна цифра, и столько же отбросить в делимом. В данном случае отбросим две последние цифры, тогда у нас останется 22 сотни, которые нужно разделить на 3 сотни. Какое здесь получится частное? Можно допустить, что частное будет равно 7, но это допущение нужно проверить. Оно, конечно, близко к 7, потому что по таблице умножения $3 \times 7 = 21$, но ведь мы перед делением отбросили по две цифры, в делимом и в делителе, а потому ручаться за такое частное мы не можем. Сделаем проверку: $374 \times 7 = 2\,618$. Наши опасения оправдались: взятое нами частное оказалось велико. Испытаем теперь число, на 1 меньшее 7, т. е. 6. Выполним умножение $374 \times 6 = 2\,244$. Полученное произведение в точности совпадает с делимым. Значит, $2\,244 : 374 = 6$.

Обратите внимание на то, что мысленное отбрасывание цифр мы начинаем с делителя, а не с делимого, т. е. мы отбрасываем в делителе столько последних цифр, чтобы оставалась только одна крайняя левая, а потом столько же цифр отбрасываем и в делимом.

Иногда при определении цифры частного рекомендуется первую слева цифру делителя увеличить на 1. Это бывает в тех случаях, когда вторая цифра делителя больше 5. Попробуем разделить 29 976 на 4 996. Здесь делитель 4 996 ближе к 5 000, чем к 4 000, поэтому при отбрасывании последних трёх цифр делителя лучше брать не 4, а 5 и затем делить 29 тысяч на 5 тысяч. Так как 29 очень близко к 30, то можно взять 6 раз. Проверим: $4\,996 \times 6 = 29\,976$. Результат совпадает с делимым. Значит:

$$29\,976 : 4\,996 = 6.$$

Из рассмотрения этих примеров можно сделать следующий вывод: при делении многозначного числа на многозначное для определения однозначного частного нужно, отбросив в делимом и делителе по одинаковому числу цифр справа так, чтобы в делителе осталась только одна цифра, узнать, сколько раз полученный однозначный делитель содержится в полученном новом делимом.

2) Частное многозначное. Разделим 58 296 на 347. Определим число цифр частного: $347 \times 10 = 3\,470$, делимое $58\,296 > 3\,470$, значит, частное больше 10.

Действие начинается с выделения в делимом стольких цифр, начиная со старших разрядов, чтобы составленное из них число было не меньше делителя. Действие принято записывать так:

```
_58296|347
 347   |168
 _2359
  2082
  _2776
   2776
      0
```

Берём 582 сотни и делим на 347, получаем в частном единицу, затем вычитаем произведение 347 на 1 из 582 сотен и находим остаток 235 сотен. Для того чтобы найти десятки частного, нужно раздробить остаток 235 в десятки (это будет 2 350) и прибавить к ним число десятков, имеющихся в делимом, т. е. 9, получится 2 359. Для краткости речи говорят, что нужно к остатку «снести» 9 десятков. Делим 2 359 десятков на 347 и находим в частном 6 десятков. Вычитаем произведение 347 на 6, т. е. 2 082 десятка, из 2 359 десятков и находим остаток — 277 десятков. Для нахождения единиц частного сносим к остатку 6 единиц делимого и получаем 2 776, делим их на 347 и получаем в частном 8. Итак, $58\,296 : 347 = 168$.

## § 37. Проверка деления.

**Проверка умножением.** Деление можно проверить умножением на том основании, что делимое является произведением, а делитель и частное — сомножителями. Поэтому для проверки деления следует умножить делитель на частное. Если результат будет равен делимому, то весьма возможно, что действие сделано правильно (имеется в виду деление без остатка).

П р и м е р. 5 535 : 45 = 123. П р о в е р к а. 123 · 45 = 5 535.

**Проверка делением.** Так как делимое является произведением делителя на частное, то от деления делимого на частное должен получиться делитель. Поэтому в целях проверки деления можно делимое разделить на частное.

П р и м е р. 13 104 : 56 = 234. П р о в е р к а. 13 104 : 234 = 56.

## § 38. Совместное умножение и деление.

В практике деления могут встретиться следующие случаи.

1. **Деление числа на произведение.** Пусть требуется разделить 960 на произведение чисел: $4 \times 6 \times 8 = 192$. Вычислим сначала искомый результат:

$$960 : 192 = 5.$$

Теперь выполним деление последовательно:

а) 960 : 4 = 240; б) 240 : 6 = 40; в) 40 : 8 = 5.

Отсюда получаем: **чтобы разделить число на произведение, достаточно разделить это число на первый сомножитель, полученное частное разделить на второй сомножитель, вновь полученное частное разделить на третий сомножитель и т. д.**

2. **Деление произведения на число.** Пусть требуется разделить на 8 произведение трёх чисел: 10; 24 и 18, т. е. 4 320. Разделим это произведение на 8.

$$4\ 320 : 8 = 540.$$

Поступим теперь иначе. Один из сомножителей (24) делится на 8. Разделим его на 8 и результат умножим на остальные сомножители:

а) 24 : 8 = 3; б) $3 \times (10 \times 18) = 3 \times 180 = 540$.

Результат получился тот же самый. Следовательно: **чтобы разделить произведение на какое-нибудь число, достаточно разделить на это число один сомножитель, оставив другие без изменения.** Предполагается, что среди сомножителей имеется хоть один такой, который делится на данное число.

Оба рассмотренных приёма применяются только в случае выполнения деления без остатка.

**3. Умножение числа на частное.** Пусть требуется умножить 6 на частное от деления 200 на 5, т. е. на 40:

$$6 \times 40 = 240.$$

Поступим теперь иначе. Нам нужно вычислить:

$$6 \times (200 : 5);$$

умножим 6 на 200 и произведение разделим на 5:

$$6 \times 200 = 1\,200,$$
$$1\,200 : 5 = 240.$$

Результат получился тот же самый. Значит, **чтобы умножить число на частное, достаточно умножить это число на делимое и полученное произведение разделить на делитель.**

В общем виде:

$$a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c.$$

**4. Деление числа на частное.** Пусть требуется разделить 360 на частное от деления 180 на 6, т. е. на 30:

$$360 : 30 = 12;$$

Поступим теперь иначе. Нам нужно вычислить:

$$360 : (180 : 6);$$

разделим 360 на 180 и частное умножим на 6:

$$360 : 180 = 2,$$
$$2 \times 6 = 12.$$

Результат получился тот же самый. Значит, **чтобы разделить число на частное, достаточно разделить это число на делимое и полученное частное умножить на делитель.**

В общем виде:

$$a : (b : c) = (a : b) \cdot c.$$

## § 39. Устное деление.

1. Разделим 484 на 4. Для этого представим делитель как $2 \cdot 2$ и выполним деление последовательно: $484 : 2 = 242$; $242 : 2 = 121$.

2. При делении можно прибегать к некоторым особым случаям разбиения делимого на слагаемые. Покажем, например, как можно разделить 868 на 7. Разобьём делимое так:

$$868 : 7 = (700 + 140 + 28) : 7 = 100 + 20 + 4 = 124.$$

Здесь мы выделили сначала не 8 сотен, а 7 сотен, затем отделили число 140 из тех соображений, что оно делится на 7. Значит, успех деления зависит от того, насколько удачно разбито делимое на слагаемые.

3. Рассмотрим ещё пример, подобный предыдущему:

$$984 : 8 = (800 + 160 + 24) : 8 = 100 + 20 + 3 = 123.$$

4. При делении иногда целесообразно представить делимое как разность, например:

$$483 : 7 = (490 - 7) : 7 = 70 - 1 = 69.$$

5. При делении можно иногда прибегать к разложению делимого на сомножители, например:

$$90\,000 : 15 = (45 \cdot 2\,000) : 15 = 3 \cdot 2\,000 = 6\,000.$$

## § 40. Приближённое частное.

Деление чисел отличается от сложения и умножения той особенностью, что оно не всегда выполнимо без остатка. В этом отношении оно напоминает действие вычитания, которое тоже не может быть выполнено во всех без исключения случаях.

Мы не можем, например, число 23 разделить на 5, потому что не существует такого целого числа, которое при умножении на 5 давало бы в произведении число 23. Как же поступают в этих случаях?

Для выяснения этого вопроса рассмотрим одновременно два примера. Разделим 387 на 12 и 1 373 на 16:

$$387 : 12 = 32 \text{ (ост. } 3); \quad 1\,373 : 16 = 85 \text{ (ост. } 13).$$

В обоих случаях при делении получился остаток, но в первом случае остаток 3 значительно меньше делителя, т. е. 12, он не достигает даже половины делителя, а во втором случае остаток 13 по своей величине близок к делителю, т. е. к 16, он значительно больше половины делителя. Ввиду того что во втором случае отбрасываемый остаток довольно велик (13), лучше взять в частном не 85, а 86, т. е. $1373 : 16 \approx 86$.

Знак $\approx$ употребляется для обозначения приближённых равенств.

Принято говорить, что в первом случае приближённое частное взято **с недостатком,** а во втором случае частное взято **с избытком.**

Например, при делении числа 23 на число 7 мы получим в частном 3, а в остатке 2; при делении же 47 на 8 мы предпочтём взять в частном 6, а не 5, потому что если мы возьмём 5, то потеря составит целых 7 единиц. Значит, частное от деления 23 на 7 мы взяли с недостатком, а частное от деления 47 на 8 взяли с избытком.

В дальнейшем мы будем руководствоваться следующим правилом: **при делении с остатком частное нужно брать с недостатком, если отбрасываемый остаток меньше половины делителя, и следует увеличить на 1** (т. е. брать с избытком), **если отбрасываемый остаток больше половины делителя; если отбрасываемый остаток в точности равен половине делителя, то частное следует увеличить на единицу, когда оно оканчивается нечётной цифрой, и оставить без изменения, когда оно оканчивается чётной цифрой.**

Когда при делении получается остаток, то частное не может быть точным числом, в обоих случаях (с недостатком и с избытком) оно будет **приближённым.** Это значит, что когда мы пишем:

$$23 : 7 \approx 3 \text{ и } 47 : 8 \approx 6,$$

то в обоих случаях допускаем некоторую, как принято говорить, «погрешность».

Разъясним эту мысль. Пусть у нас имеется 23 руб. (рублями) и их нужно разделить поровну между семью лицами. Мы можем дать каждому по 3 руб. При этом останется 2 нераспределённых рубля. Каждый из семи человек получил немного меньше, чем ему полагалось. Сколько же он недополучил, или «потерял»? Меньше одного рубля (несколько копеек). Значит, при делении у каждого получилась потеря, недостача, меньшая одного рубля (единицы). Эта потеря и является погрешностью.

Если при делении чисел погрешность оказывается меньше единицы, то принято говорить, что частное найдено *с точностью до единицы.*

## § 41. Среднее арифметическое.

Рассмотрим задачу: «Поезд находился в пути 4 часа. В первый час он прошёл 40 *км*, во второй 42 *км*, в третий 38 *км* и в четвёртый 36 *км*. Найти его среднюю скорость».

Под средней скоростью движения поезда разумеется скорость такого поезда, который выходит с начальной станции в один момент с данным поездом, приходит на конечную станцию в один момент с ним и движется всё время *равномерно.*

Чтобы найти эту скорость, вычислим сначала путь, пройденный поездом за 4 часа. Для этого сложим отдельные указанные в задаче расстояния:

$$40 + 42 + 38 + 36 = 156 \ (\textit{км}).$$

Но так как поезд находился в пути 4 часа, то для вычисления средней скорости движения нужно 156 разделить на 4:

$$156 : 4 = 39 \text{ (}\mathit{км}\text{ в час).}$$

Найденное число 39 *км* является средней скоростью движения. Что же нужно было сделать, чтобы найти среднюю скорость? Нужно было сначала сложить отдельные расстояния и потом разделить полученную сумму на число этих расстояний.

Рассмотрим другой пример: «Четыре ученика измеряли длину изгороди школьного огорода. Каждый измерял самостоятельно. У первого получилось 507 *м*, у второго 508 *м*, у третьего 511 *м* и у четвёртого 506 *м*. Какое же из этих чисел более точно выражает длину изгороди?»

Так как четыре измерения дали не вполне одинаковые числовые результаты, причём одно число могло быть немного больше истинного значения, другое немного меньше, а истинная длина изгороди нам неизвестна, то за наиболее вероятное значение принимают среднее из них.

Как его найти? Так же, как и в первом примере, т. е. сначала найти сумму чисел, полученных при измерениях, а потом эту сумму разделить на число измерений, т. е.

$$507 + 508 + 511 + 506 = 2\,032 \text{ (}\mathit{м}\text{),}$$
$$2\,032 : 4 = 508 \text{ (}\mathit{м}\text{);}$$

508 *м* — и будет средняя длина изгороди.

В этих двух примерах мы нашли средние числа. Хотя эти примеры имели различный смысл: в первом речь шла о скорости поезда, а во втором — о длине изгороди, но способ вычисления средних чисел был один и тот же. Он состоял в том, что сначала находили сумму всех чисел, а потом эту сумму делили на их число.

В арифметике принято число, найденное таким способом, называть средним арифметическим нескольких чисел. Что же такое среднее арифметическое?

**Средним арифметическим нескольких чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их число.**

## § 42. Порядок выполнения совместных действий. Скобки.

Рассмотренные нами четыре действия — сложение, вычитание, умножение и деление — принято делить на две ступени. Первые два действия, т. е. сложение и вычитание, называются действиями первой ступени, а последние два, т. е. умножение и деление, —

действиями второй ступени. В каждой ступени, следовательно, имеется одно прямое и одно обратное ему действие.

Мы будем называть арифметическим выражением всякую совокупность чисел и знаков, указывающих, какие действия над этими числами нужно произвести.

При решении задач приходится встречаться с выражениями, содержащими или только действия первой ступени, или только действия второй ступени, или, наконец, действия и первой и второй ступени вместе. Например:

$$\left.\begin{array}{r} 23 + 12 - 5 \\ 38 - 18 + 11 \end{array}\right\} \text{действия первой ступени;}$$

$$\left.\begin{array}{r} 60 \times 24 : 8 \\ 100 : 5 \times 6 \end{array}\right\} \text{действия второй ступени;}$$

$$\left.\begin{array}{r} 80 \times 20 + 10 \\ 120 : 12 - 8 \\ 90 + 60 : 4 \\ 150 + 300 \times 6 \end{array}\right\} \text{действия первой и второй ступени.}$$

Возникает вопрос: в каком порядке мы будем выполнять эти действия? При вычислении многих выражений часто приходится выполнять действия в том порядке, в каком они написаны; но бывают такие случаи, когда этот порядок нарушается.

**Если в выражении встречаются только действия первой ступени, то их принято выполнять в том порядке, в каком они написаны слева направо.** Решим те примеры, которые были даны выше.

$$23 + 12 - 5 = 35 - 5 = 30;$$
$$38 - 18 + 11 = 20 + 11 = 31.$$

Если же действия нужно выполнять в другом порядке, то употребляются скобки. Например:

$$150 - (24 - 10) - (30 - 14) = 150 - 14 - 16 = 120.$$

Здесь мы сначала выполнили действия в скобках.

Таков порядок выполнения действий в выражениях, содержащих только действия первой ступени.

Теперь перейдём к порядку действий второй ступени. Он состоит в следующем. **Если в выражении встречаются только действия второй ступени, то их принято выполнять в том порядке, в каком они написаны, слева направо.** Например:

$$60 \times 24 : 8 = 1\,440 : 8 = 180;$$
$$100 : 5 \times 6 = 20 \times 6 = 120.$$

Если же действия нужно выполнить в другом порядке, то употребляются скобки, например:

$$72 : (36 : 4) = 8; \ 120 : (4 \times 10) = 3.$$

В каждом примере сначала выполняют действия в скобках. **Если в выражении встречаются действия и первой, и второй ступени, то сначала принято выполнять действия второй ступени, а потом первой.**

1) $80 \times 20 + 10 = 1\,600 + 10 = 1\,610$,
2) $90 + 60 : 4 = 90 + 15 = 105$.

Всякое отклонение от этого порядка должно быть обозначено скобками. Например:

$$(15 + 10) \times 4 - (27 - 9) : 3 = 25 \times 4 - 18 : 3 = 100 - 6 = 94.$$

---

Глава третья.

# Зависимости между данными числами и результатами действий над ними.

## § 43. Сложение.

Рассмотрим следующий факт: В классе числится 28 учеников. Присутствуют на уроке 25 человек и отсутствуют 3. Это можно записать при помощи сложения следующим образом:

$$25 + 3 = 28,$$

т. е. сумма присутствующих и отсутствующих учеников равна 28. Теперь подумаем, как может пришедший в класс учитель быстро подсчитать, сколько учеников присутствует на уроке. Общее число учеников в классе ему известно из классного журнала, число отсутствующих ему скажет дежурный. Чтобы узнать, сколько учеников присутствует на уроке, учитель должен из 28 вычесть 3. Если неизвестное число присутствующих учеников обозначим буквой $x$, то

$$x + 3 = 28;$$

т. е. если к числу присутствующих учеников прибавить число отсутствующих, то получим число всех учеников класса. Так как мы знаем сумму и одно слагаемое, то можно найти неизвестное слагаемое:

$$x = 28 - 3, \text{ или } x = 25.$$

Получаем правило: **чтобы найти неизвестное слагаемое, достаточно из суммы двух слагаемых вычесть известное слагаемое.**

Приведём пример:

$$x + 10 = 30; \quad x = 30 - 10; \quad x = 20.$$

Пользуясь буквенными обозначениями, можно написать: если

$$a + b = c,$$

то

$$a = c - b \text{ и } b = c - a.$$

## § 44. Проверка сложения.

Правило, изложенное в предыдущем параграфе, позволяет проверить правильность сложения. Допустим, что мы сложили два числа: $346 + 588 = 934$.

Так как одно из двух слагаемых равно их сумме минус другое слагаемое, то, вычитая из суммы 934 какое-нибудь слагаемое, например первое, мы должны получить второе слагаемое. Конечно, это будет только в том случае, если мы не сделали ошибки при сложении и не сделаем новой ошибки при вычитании.

Выполним вычитание: $934 - 346 = 588$. Сложение было сделано правильно.

## § 45. Вычитание.

Задача. Я купил альбом за 25 руб. Как узнать, сколько денег у меня было до покупки альбома, если после покупки осталось 53 руб.?

Пусть у меня было $x$ руб., я израсходовал 25 руб., и у меня осталось 53 руб. Запишем при помощи вычитания:

$$x - 25 = 53.$$

Сколько же у меня было денег первоначально? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно сложить истраченные и оставшиеся деньги, т. е.

$$x = 25 + 53; \; x = 78.$$

Таким образом, первоначально у меня было 78 руб.

В рассмотренной задаче было неизвестно уменьшаемое, а вычитаемое и разность были известны. Чтобы найти уменьшаемое, мы к вычитаемому прибавили разность. Отсюда получаем правило: **чтобы найти неизвестное уменьшаемое, достаточно к вычитаемому прибавить разность.** Приведём пример:

$$x - 7 = 9;\ x = 7 + 9;\ x = 16.$$

Запишем это правило, пользуясь буквенными обозначениями: если

$$a - b = c,$$

то правило нахождения уменьшаемого по вычитаемому и разности будет записано так:

$$a = b + c.$$

Решим ещё одну задачу: «Учащиеся работали на пришкольном участке. Сторож перед началом работы выдал каждому из них по одной лопате. Как узнать, сколько выдано лопат, если всего их было 90, а после выдачи осталось 50?»

Если число выданных лопат обозначить через $x$, то

$$90 - x = 50.$$

Как нам найти $x$? Если мы от общего числа лопат отнимем число оставшихся, то получится ответ на поставленный вопрос. Чтобы найти $x$, нужно из 90 вычесть 50. Отсюда вытекает следующее правило: **чтобы найти неизвестное вычитаемое, достаточно из уменьшаемого вычесть разность.** Это можно записать так:

$$x = 90 - 50;\ x = 40.$$

Приведём пример:

$$9 - x = 5;\ x = 9 - 5\ ;\ x = 4.$$

Запишем последнее правило, пользуясь буквенными обозначениями: если $a - b = c$, то правило нахождения вычитаемого по уменьшаемому и разности примет вид:

$$b = a - c.$$

## § 46. Умножение.

Рассмотрим следующий факт. Укладчица на конфетной фабрике укладывает по 32 конфеты в каждую коробку. Кладовщик, отпуская ей конфеты, сказал: «Я выдам вам конфет на 100 коробок», и добавил: «Значит, $32 \times 100 = 3\ 200$». Он подсчитал число конфет, допустив, что коробок 100 штук. Если бы коробок было меньше, например 50, то число конфет было бы меньше (1 600), а если бы коробок было больше, например 120, то число конфет пришлось бы увеличить.

Следовательно, каждый раз, когда нужно найти число конфет, решается такая задача:

$$32 \cdot x = ?$$

Зная $x$, мы можем найти число необходимых конфет.

Но кладовщик, не зная числа коробок, мог бы рассуждать ещё так: я отпущу вам 4 000 конфет, потом будет видно, сколько понадобится коробок. Значит, в этом случае получится:

$$32 \cdot x = 4\,000.$$

Здесь неизвестен один из сомножителей. Чтобы его найти, нужно произведение (4 000) разделить на известный сомножитель (32):

$$x = 4\,000 : 32; \quad x = 125 \quad \text{(коробок)}.$$

Правило: **чтобы найти неизвестный сомножитель, достаточно разделить произведение двух сомножителей на известный сомножитель.**

Приведём пример:

$$25 \cdot x = 850; \; x = 850 : 25; \; x = 34.$$

Запишем правило, пользуясь буквенными обозначениями: если

$$a \cdot b = c,$$

то

$$a = c : b, \quad b = c : a.$$

## § 47. Проверка умножения.

На основании изложенного в предыдущем параграфе проверка умножения может быть осуществлена следующим образом. Допустим, что выполнено умножение:

$$125 \times 36 = 4\,500.$$

Так как один из сомножителей равен произведению, делённому на другой сомножитель, то для проверки достаточно произведение 4 500 разделить, положим, на второй сомножитель 36. Если в результате получится первый сомножитель 125, то весьма возможно, что умножение сделано правильно:

$$4\,500 : 36 = 125.$$

## § 48. Деление.

Рассмотрим следующий факт. Садовник разбивает сад и делает на бумаге примерный набросок будущего расположения деревьев. Всего намечено 24 ряда деревьев. Если посадить по 35 деревьев в каждом ряду, то всего нужно будет 840 деревьев ($35 \times 24 = 840$). Если посадить деревья более редко, то их потребуется меньше. Например, чтобы в каждом из 24 рядов получилось по 30 деревьев, достаточно 720 деревьев. Можно взять деревьев больше, чем 840, например 912, и тогда деревья будут рассажены гуще: в каждом ряду будет 38 деревьев.

Значит, каждый раз, когда нужно найти число деревьев в ряду, решается задача:

$$x : 24 = ?$$

Вместо $x$ подставляются или 840, или 720, или 912, или другие числа.

Но садовник мог бы рассуждать иначе: по плану видно, что наиболее удачным будет такое расположение деревьев, когда в каждом ряду будет 32 дерева. Тогда получим:

$$x : 24 = 32.$$

Здесь неизвестно делимое. Чтобы его найти, нужно делитель умножить на частное, т. е.

$$x = 32 \times 24; \qquad x = 768 \text{ (деревьев).}$$

Сделаем отсюда выводы. Буква $x$ обозначает делимое. Чтобы его найти, мы умножили делитель на частное. Получаем следующее правило: **чтобы найти неизвестное делимое, достаточно делитель умножить на частное.**

Приведём пример:

$$x: 6 = 9; \qquad x = 6 \times 9; \qquad x = 54.$$

Решим ещё одну задачу: «600 географических карт распределены поровну между школами района. Каждая школа получила 25 карт. Сколько школ в районе было снабжено географическими картами?»

Если неизвестное число школ мы обозначим буквой $x$, то

$$600 : x = 25.$$

В этом равенстве неизвестен делитель. Чтобы его найти, необходимо разделить делимое на частное:

$$x = 600 : 25; \qquad x = 24.$$

Отсюда сразу получается правило: **чтобы найти неизвестный делитель, достаточно делимое разделить на частное.**

Приведём пример:

$$200 : x = 8; \qquad x = 200 : 8; \qquad x = 25.$$

Обозначив делимое, делитель и частное соответственно буквами $a$, $b$, $c$, можем написать: $a : b = c$; тогда два последних правила запишутся так:

$$a = b \cdot c \quad \text{и} \quad b = a : c.$$

Глава четвёртая.

# Изменение результатов действий в зависимости от изменения данных.

## § 49. Изменение суммы.

В этой главе речь будет идти о том, как изменяются результаты арифметических действий, если изменять числа, над которыми выполняются эти действия.

1. Возьмём сумму двух слагаемых: $20 + 32 = 52$, и проследим, как она будет изменяться, если станем менять слагаемые. Будем увеличивать первое слагаемое, второе же слагаемое будем оставлять без изменения. Запишем результаты в виде таблицы:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Первое слагаемое | 20 | 21 | 23 | 26 | 30 | 35 | 41 |
| Второе слагаемое | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 | 32 |
| Сумма | 52 | 53 | 55 | 58 | 62 | 67 | 73 |

В первом столбце написано, что $20 + 32 = 52$. Во втором столбце мы увеличили первое слагаемое на единицу, сумма при этом увеличилась тоже на единицу. Посмотрите все столбцы этой таблицы до конца и вы убедитесь, что когда одно из слагаемых увеличивается на несколько единиц, а второе слагаемое остаётся без изменения, то сумма увеличивается на столько единиц, на сколько увеличено первое слагаемое.

Вывод. **Если какое-нибудь одно из двух слагаемых увеличим на несколько единиц, не изменяя другого, то сумма увеличится на столько же единиц.**

В общем виде: если

$$a + b = c,$$

то

$$(a + m) + b = c + m.$$

2. Будем теперь уменьшать слагаемое. Для этого возьмём предыдущую таблицу и будем рассматривать её справа налево.

В крайнем правом столбце слагаемые 41 и 32, а сумма 73. Начиная со второго столбца справа, мы уменьшаем первое слагаемое сначала на 6, потом на 5, потом на 4 и т. д. При этом сумма соответственно уменьшается на 6, на 5, на 4 и т. д.

Вывод. **Если какое-нибудь одно из двух слагаемых уменьшим на несколько единиц, не изменяя другого, то сумма уменьшится на столько же единиц.**

В общем виде: если

$$a + b = c,$$

то

$$(a - m) + b = c - m.$$

Изложенные здесь два свойства суммы можно использовать для облегчения сложения. Пусть требуется быстро сложить 37 и 58. Будем рассуждать так: увеличим первое слагаемое до 40, т. е. прибавим к нему 3 единицы; числа 40 и 58 сложить легче, чем данные, потому что на первом месте стоит круглое число десятков (40). Но по первому свойству получившаяся сумма (98) больше искомой на столько, сколько мы прибавили к первому слагаемому, т. е. на 3 единицы. Значит, если мы от изменённой суммы отнимем прибавленные 3 единицы, то у нас получится искомая сумма двух слагаемых: 37 и 58, т. е. 95. Этим приёмом мы пользовались ещё в § 16.

## § 50. Изменение разности.

Возьмём разность двух чисел: $93 - 35 = 58$, и проследим, как она будет изменяться при изменении уменьшаемого и вычитаемого.

1. Будем увеличивать уменьшаемое, оставляя вычитаемое без изменения. Запишем эти изменения в таблицу:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Уменьшаемое | 93 | 94 | 96 | 99 | 103 | 108 | 114 | 121 |
| Вычитаемое | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 |
| Разность | 58 | 59 | 61 | 64 | 68 | 73 | 79 | 86 |

Во втором столбце уменьшаемое увеличено на единицу, разность тоже увеличилась на единицу. В третьем столбце уменьшаемое увеличилось на 2, на столько же увеличилась и разность. Рассмотрите остальные столбцы сами.

Вывод. **Если уменьшаемое увеличим на несколько единиц, не изменяя вычитаемого, то разность увеличится на столько же единиц.**

2. Будем теперь уменьшать уменьшаемое и представим результаты в виде следующей таблицы:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Уменьшаемое | 93 | 92 | 90 | 87 | 83 | 78 | 72 | 65 |
| Вычитаемое | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 |
| Разность | 58 | 57 | 55 | 52 | 48 | 43 | 37 | 30 |

Если мы будем последовательно столбец за столбцом просматривать эту таблицу, то обнаружим, что на сколько единиц мы уменьшали уменьшаемое, на столько же единиц всякий раз уменьшалась разность.

В ы в о д. **Если уменьшаемое уменьшим на несколько единиц, не изменяя вычитаемого, то разность уменьшится на столько же единиц.**

3. Рассмотрим изменение вычитаемого. Как будет изменяться разность при у в е л и ч е н и и  в ы ч и т а е м о г о? Возьмём хотя бы прежний пример вычитания и составим таблицу:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Уменьшаемое | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 |
| Вычитаемое | 35 | 36 | 38 | 41 | 45 | 50 | 56 | 63 |
| Разность | 58 | 57 | 55 | 52 | 48 | 43 | 37 | 30 |

Во втором столбце мы увеличили вычитаемое на единицу (было 35, стало 36). Разность при этом уменьшилась тоже на единицу. Подобное явление будет наблюдаться и во всех остальных столбцах.

В ы в о д. **Если вычитаемое увеличим на несколько единиц, не изменяя уменьшаемого, то разность уменьшится на столько же единиц.**

4. Теперь рассмотрим изменение разности при у м е н ь ш е н и и  в ы ч и т а е м о г о. Возьмём разность двух чисел: 93 — — 35 = 58, и составим таблицу:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Уменьшаемое | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 | 93 |
| Вычитаемое | 35 | 34 | 32 | 29 | 25 | 20 | 14 | 7 | 0 |
| Разность | 58 | 59 | 61 | 64 | 68 | 73 | 79 | 86 | 93 |

При сравнении чисел первого столбца с числами второго столбца оказывается, что когда вычитаемое уменьшилось на единицу, разность увеличилась тоже на единицу. При сравнении чисел первого и пятого столбцов можно обнаружить, что с уменьшением вычитаемого на 10 единиц разность увеличивается тоже на 10 единиц. Подобное явление будет наблюдаться и при сравнении других столбцов.

В ы в о д. **Если вычитаемое уменьшим на несколько единиц, не изменяя уменьшаемого, то разность увеличится на столько же единиц.**

5. Рассмотрим, наконец, случай, когда у м е н ь ш а е м о е  и  в ы ч и т а е м о е  и з м е н я ю т с я  о д н о в р е м е н н о. Мы составим сразу две таблицы: в одной из них мы возьмём разность 10 — 7 = 3, в другой разность 100 — 98 = 2. В первой таблице будет представлено увеличение уменьшаемого и вычитаемого, а во второй — уменьшение их на одно и то же число:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Уменьшаемое | 10 | 11 | 13 | 16 | 20 | 25 | 31 | 38 | 46 | 56 |
| | Вычитаемое | 7 | 8 | 10 | 13 | 17 | 22 | 28 | 35 | 43 | 53 |
| | Разность | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II. Уменьшаемое | 100 | 98 | 95 | 93 | 83 | 71 | 57 | 41 | 23 | 2 |
| Вычитаемое | 98 | 96 | 93 | 91 | 81 | 69 | 55 | 39 | 21 | 0 |
| Разность | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

Таблицы эти показывают, что несмотря на многочисленные изменения, которым подвергались в обоих случаях уменьшаемое и вычитаемое, разность ни разу не изменилась.

Вывод. **Если уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличим или уменьшим на одно и то же число единиц, то разность не изменится.**

Мы изучили пять свойств, относящихся к изменению разности. Попробуем записать их в общем виде. Если мы запишем вычитание в виде равенства: $a - b = c$, то изложенные свойства можно будет записать так:

1. $(a + m) - b = c + m$; 3. $a - (b + m) = c - m$;
2. $(a - m) - b = c - m$; 4. $a - (b - m) = c + m$;
5. $(a + m) - (b + m) = c$ и $(a - m) - (b - m) = c$.

Воспользуемся хотя бы последним свойством разности для ускорения вычислений. Пусть нужно сделать вычитание:

$$234 - 176.$$

Прибавим к уменьшаемому и вычитаемому по 24, чтобы вычитаемое выразилось круглым числом сотен; тогда получим:

$$258 - 200 = 58.$$

Это действие можно выполнить в уме. Следовательно,

$$234 - 176 = 58.$$

## § 51. Изменение произведения.

1. Возьмём произведение двух чисел: $4 \times 36 = 144$. Будем увеличивать в несколько раз первый сомножитель. Представим результаты этого изменения в виде таблицы:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Первый сомножитель | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
| Второй сомножитель | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 |
| Произведение | 144 | 288 | 432 | 576 | 720 | 864 | 1008 | 1152 |

Если мы сравним первый столбец со вторым, то увидим, что первый сомножитель во втором столбце в 2 раза больше, чем в первом, соответственно и произведение второго столбца (288) в 2 раза больше, чем произведение первого столбца (144).

Проследите, как изменяется произведение при увеличении одного из сомножителей в остальных столбцах.

Вывод. **Если один из сомножителей увеличим в несколько раз, не изменяя другого, то и произведение увеличится во столько же раз.**

В общем виде:

$$\text{если } ab = c, \text{ то } (am)\,b = cm.$$

2. Как будет изменяться произведение при уменьшении в несколько раз одного сомножителя и при сохранении другого неизменным? Мы воспользуемся прежним примером, но будем рассматривать таблицу справа налево.

Рассмотрение таблицы показывает, что когда первый сомножитель уменьшился вдвое ($32 : 2 = 16$), то и произведение уменьшилось вдвое ($1\,152 : 2 = 576$); когда он уменьшился в 8 раз ($32 : 8 = 4$), то и произведение уменьшилось в 8 раз ($1\,152 : 8 = 144$).

Вывод. **Если один из сомножителей уменьшим в несколько раз, не изменяя другого, то и произведение уменьшится во столько же раз.**

В общем виде:

$$\text{если } ab = c, \text{ то } (a : m)\,b = c : m.$$

Как можно применить первое правило в практике вычислений?

Пример. $82 \times 5$. Увеличим множитель 5 в 2 раза; получим $82 \times 10 = 820$. Умножение на 10 сводится к приписыванию одного нуля, но полученное произведение в 2 раза больше, чем нужно; поэтому его нужно разделить на 2 ($820 : 2 = 410$). Перепишем подряд все выполненные нами действия:

$82 \times 5 = ?$; $82 \times 10 = 820$; $820 : 2 = 410$; $82 \times 5 = 410$.

Таким образом, умножение числа на 5 можно производить следующим образом: сначала умножить его на 10, а полученный результат разделить на 2.

## § 52. Изменение частного.

1. Возьмём частное от деления 12 на 3, будем постепенно увеличивать делимое вдвое, втрое, вчетверо и т. д. Результаты изменения представим в виде таблицы:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Делимое | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 |
| Делитель | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Частное | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |

При сравнении второго столбца с первым оказывается, что делимое во втором столбце вдвое больше, чем в первом ($24 = 2 \times 12$), в то же самое время и частное второго столбца вдвое больше частного первого столбца. Сравните остальные столбцы.

Вывод. **Если делимое увеличим в несколько раз, не изменяя делителя, то частное увеличится во столько же раз.**

2. Будем теперь уменьшать делимое в несколько раз. Возьмём исходное равенство 360 : 2 = 180 и составим таблицу:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Делимое | 360 | 180 | 120 | 90 | 72 | 60 | 40 | 36 | 18 | 10 |
| Делитель | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Частное | 180 | 90 | 60 | 45 | 36 | 30 | 20 | 18 | 9 | 5 |

Здесь делимое постепенно уменьшается в 2 раза, в 3 раза, в 4 раза, в 5 раз и т. д. Частное уменьшается соответственно в 2 раза, в 3 раза и т. д.

Вывод. **Если делимое уменьшим в несколько раз, не изменяя делителя, то частное уменьшится во столько же раз.**

3. Рассмотрим теперь изменение частного в зависимости от изменения делителя. Составим соответствующую таблицу, начав её с деления: 240 : 2 = 120. Будем увеличивать делитель в несколько раз:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Делимое | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 |
| Делитель | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| Частное | 120 | 60 | 40 | 30 | 24 | 20 | 15 | 12 | 10 |

Во втором столбце делитель увеличился вдвое, но вместе с тем частное уменьшилось точно так же вдвое (было 120, стало 60).

К тому же выводу придём, сравнивая делители отдельных столбцов и частные этих столбцов.

Вывод. **Если делитель увеличим в несколько раз, не изменяя делимого, то частное уменьшится во столько же раз.**

4. Будем теперь уменьшать делитель. Как изменится частное при уменьшении делителя в несколько раз? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим таблицу, которая начинается с деления числа 400 на 100:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Делимое | 400 | 400 | 400 | 400 | 400 | 400 | 400 | 400 | 400 |
| Делитель | 100 | 50 | 25 | 20 | 10 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| Частное | 4 | 8 | 16 | 20 | 40 | 80 | 100 | 200 | 400 |

Из таблицы видно, что когда делитель уменьшился в 2 раза (второй столбец), частное увеличилось в 2 раза. Когда делитель в третьем столбце уменьшился в 4 раза по сравнению с первым столбцом, то частное увеличилось в 4 раза.

Вывод. **Если делитель уменьшим в несколько раз, не изменяя делимого, то частное увеличится во столько же раз.**

5. Перейдём теперь к рассмотрению одновременного изменения делимого и делителя. Этот наиболее интересный и важный случай мы будем сразу рассматривать на двух таблицах. В I таблице будет представлено одновременное увеличение делимого и делителя, а во II таблице — их одновременное уменьшение в одно и то же число раз.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | Делимое | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| | Делитель | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | Частное | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| II. | Делимое | 1800 | 900 | 450 | 300 | 150 | 75 | 60 | 45 | 30 | 15 |
| | Делитель | 600 | 300 | 150 | 100 | 50 | 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| | Частное | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |

В таблице I делимое и делитель увеличиваются последовательно в 2 раза, в 3 раза и, наконец, в 10 раз. Вы видите, что такое изменение нисколько не отражается на частном. Частное во всех случаях продолжает оставаться равным 3.

Во II таблице показано одновременное уменьшение делимого и делителя в одно и то же число раз.

Вывод. **Если делимое и делитель одновременно увеличим или уменьшим в одинаковое число раз, то частное не изменится.**

Изложенные в этом параграфе пять свойств частного запишем в общем виде. Если дано деление: $a : b = c$, то указанные свойства примут вид:

1. $(a \cdot m) : b = c \cdot m$;     3. $a : (b \cdot m) = c : m$;
2. $(a : m) : b = c : m$;     4. $a : (b : m) = c \cdot m$;
5. $(a \cdot m) : (b \cdot m) = c$ и $(a : m) : (b : m) = c$.

Последним свойством частного постоянно пользуются в практических вычислениях, когда деление выполняется «нацело». Если нужно разделить 60 на 20, то можно предварительно отбросить по нулю в делимом и в делителе, что равносильно уменьшению делимого и делителя в 10 раз, и потом разделить 6 на 2.

---

## Глава пятая.

## Величины и их измерение.

### § 53. Предварительные разъяснения.

Рассмотрим задачу: «Поезд вышел со станции $A$ в 12 час. и прибыл на станцию $B$ в 17 час. Найти расстояние между станциями $A$ и $B$, если средняя скорость поезда 40 *км* в час».

Поезд находился в пути 5 час. Если в 1 час поезд проходил 40 *км*, то в 5 час. он пройдёт в 5 раз больше; значит:

$$40 \times 5 = 200 \ (км)$$

Подумаем, с какими числами мы имели дело в этой задаче.

Во-первых, в задаче было указано время, в течение которого поезд прошёл путь от $A$ до $B$ (5 час.). Во-вторых, была дана скорость движения поезда. В-третьих, по данным в задаче числам мы вычислили расстояние между станциями $A$ и $B$. Вместо слова «расстояние» можно сказать, что мы вычислили длину пути между станциями $A$ и $B$.

Теперь рассмотрим ещё одну задачу и потом снова подумаем, с какими числами мы в ней встретились.

«Купили 120 *кг* печенья по 10 руб. за килограмм. Сколько нужно уплатить за эту покупку?»

Цена 1 *кг* печенья 10 руб., а куплено печенья всего 120 *кг*. Значит, стоимость всей покупки можно найти путём умножения 10 на 120, рассуждая так: если 1 *кг* печенья стоит 10 руб., то 120 *кг* будут стоить в 120 раз дороже. Значит,

$$10 \times 120 = 1\,200 \ (руб).$$

Какие числа нам здесь встретились и есть ли в этой задаче что-нибудь новое по сравнению с первой задачей? — Да. Прежде всего мы можем сказать, что в этой задаче совсем иное содержание. В первой задаче речь шла о равномерном движении поезда между двумя станциями, а во второй задаче — о покупке печенья. Во второй задаче указывается вес сделанной покупки в килограммах (120 *кг*), затем цена 1 *кг* печенья (10 руб.), а вычислили мы стоимость всего печенья. Теперь сделаем выводы из рассмотрения этих двух задач.

Числа, встречавшиеся в этих задачах, обозначали:

длину пройденного пути,

время, протекшее от начала до конца движения,

скорость равномерного движения,

вес купленного товара,

стоимость всего товара,

цену единицы этого товара.

Длина, время, скорость, вес, стоимость, цена являются величинами. Под величиной разумеется всё то, что может быть измерено и выражено числом. Величин существует гораздо больше, чем мы указали. Мы назвали пока только те, которые встретились нам в двух задачах.

В самом начале этой книги мы рассмотрели две важнейшие величины: длину и вес, и рассказали о единицах измерения этих величин. Теперь мы рассмотрим ещё следующие величины: площадь, объём, время, температуру и стоимость.

## § 54. Измерение площадей.

Весьма важной в практическом отношении величиной является площадь фигуры. Мы очень часто говорим об измерении площади комнаты, двора, сада, земельного участка, озера и т. д.

В этой главе мы будем говорить исключительно о площади фигуры, которая называется **прямоугольником.** С формой прямоугольника мы встречаемся постоянно. Достаточно сказать, что лист бумаги, страница книги, потолок, стена, окно, дверь и множество других предметов имеют форму прямоугольников (рис. 3).

Прямоугольник, у которого длина и ширина равны между собой, называется **квадратом.**

Как же измеряется площадь прямоугольника? Что нужно сделать для того, чтобы измерить площадь прямоугольника?

Прежде всего нужно установить единицу измерения площади. За единицу измерения площади берут площадь квадрата, сторона которого равна какой-нибудь единице длины. Если


Рис. 3.


Рис. 4.

сторона такого квадрата равна сантиметру, то его площадь называется **квадратным сантиметром** (рис. 4); если его сторона равна метру, то его площадь называется квадратным метром, и т. д.

Имея единицу измерения, мы можем вычислить площадь прямоугольника на основании известного нам следующего правила.

Чтобы вычислить площадь прямоугольника, надо измерить одной и той же единицей измерения его длину и ширину и полученные числа перемножить.

Произведение укажет, сколько квадратных единиц содержится в площади прямоугольника.

Например: если длина 5 *см*, ширина 3 *см*, то площадь:

$$5 \times 3 = 15 \ (кв.\ см).$$

Как связаны между собой различные единицы измерения площадей?

В метрической системе высшая квадратная единица в 100 раз больше соседней с ней низшей единицы. На этом основании мы можем составить такую таблицу квадратных мер:

| | |
|---|---|
| 1 *кв. км* = 100 *кв. гм*; | 1 *кв. м* = 100 *кв. дм*; |
| 1 *кв. гм* = 100 *кв. дкм*; | 1 *кв. дм* = 100 *кв. см*; |
| 1 *кв. дкм* = 100 *кв. м*; | 1 *кв. см* = 100 *кв. мм*. |

Следует запомнить, что квадратный декаметр, т. е. квадрат, сторона которого равна 10 *м*, называется **аром.** Значит, ар содержит 100 *кв. м*. Квадратный гектометр, представляющий собой площадь квадрата со стороной 100 *м*, иначе называется **гектаром.** Таким образом, гектар равен 100 арам, или 10 000 *кв. м*.

1 *га* = 100 *а* = 10 000 *кв. м*.

## § 55. Измерение объёмов.

Не только в науке, но и в жизненной практике весьма часто приходится измерять объёмы различных предметов и строений, например комнаты, склада, ямы и т. д.

В этой книге мы рассмотрим только такие предметы, которые имеют форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 5).

Моделью параллелепипеда может служить спичечная коробка.

Прямоугольный параллелепипед, у которого длина, ширина и высота равны между собой, называется **кубом.**

Как измеряется объём прямоугольного параллелепипеда? Для этого прежде всего нужно установить единицу измерения. За единицу измерения объёма принимается объём куба, сторона которого равна какой-нибудь единице длины.

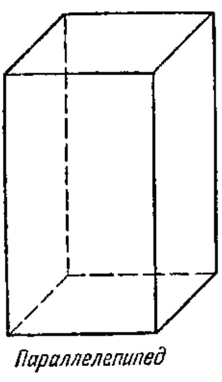


Рис. 5.

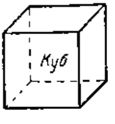


Рис. 6

Если длина ребра куба равна сантиметру, то объём такого куба называется **кубическим сантиметром** (рис. 6); если ребро равно метру, то объём куба называется кубическим метром; если — дециметру, — кубическим дециметром, и т. д.

Имея единицу измерения, мы можем вычислить объём прямоугольного параллелепипеда на основании следующего правила.

Чтобы вычислить объём прямоугольного параллелепипеда, надо измерить одной и той же единицей измерения его длину, ширину и высоту и полученные числа перемножить.

Произведение укажет, сколько кубических единиц содержится в объёме прямоугольного параллелепипеда.

Например: если длина 5 *см*, ширина 4 *см*, высота 6 *см*, то объём:

$$5 \times 4 \times 6 = 120 \text{ (\textit{куб. см})}.$$

Как связаны между собой различные единицы измерения объёмов? В метрической системе каждая высшая кубическая единица в 1 000 раз больше соседней с ней низшей единицы. На этом основании можно составить следующую таблицу:

| | |
|---|---|
| 1 *куб. км* = 1 000 *куб. гм*; | 1 *куб. м* = 1 000 *куб. дм*; |
| 1 *куб. гм* = 1 000 *куб. дкм*; | 1 *куб. дм* = 1 000 *куб. см*; |
| 1 *куб. дкм* = 1 000 *куб. м*; | 1 *куб. см* = 1 000 *куб. мм.* |

В параграфе 8 мы говорили о мерах веса, но не объяснили, как эти меры были установлены. Сделаем это теперь.

При установлении одной из основных единиц измерения веса — **килограмма** хотели сделать так, чтобы 1 *кг* был равен весу одного кубического дециметра очищенной воды при температуре 4° Цельсия. Тогда 1 *г* был бы равен весу одного кубического сантиметра такой же воды.

Измерения, сделанные в конце XVIII века, не были достаточно точными; поэтому килограммом и граммом называют не веса соответствующих объёмов воды, а те гири, которые в то время были изготовлены. С этих гирь и сделаны были многочисленные копии. Ошибка, которая тогда была допущена, весьма мала; поэтому в повседневной жизненной практике можно считать, что 1 *куб. дм* чистой воды весит 1 *кг*, а 1 *куб. см* такой воды весит 1 *г*.

Кубический дециметр принято называть **литром**. Литр обычно употребляется для измерения объёмов жидкостей — молока, керосина и др.

## § 56. Измерение времени.

Время есть величина, с которой мы постоянно встречаемся в своей жизненной практике и почти во всех научных измерениях. Уже в глубокой древности люди имели представление о времени и старались измерять его различными способами.

Какими же единицами измеряется время? Единица измерения времени заимствована из природы и называется **годом**. Год представляет собой приблизительно то время, в течение которого Земля совершает полный оборот вокруг Солнца.

Вторая единица измерения времени называется **сутками.** Сутки представляют собой то время, в течение которого Земля совершает полный оборот около своей оси. Между этими двумя единицами измерения существует такая связь: простой год содержит 365 суток, а високосный год — 366 суток. Сутки делят на 24 часа; час содержит 60 минут; минута содержит 60 секунд.

## § 57. Измерение температуры.

Температура является одной из важных величин. Мы часто говорим о температуре воздуха, воды и даже человеческого тела.

Для измерения температуры пользуются термометрами. В практике обычно встречаются ртутные термометры. Их устройство основано на свойстве ртути расширяться от нагревания.

Ртутный термометр состоит из тонкой стеклянной закрытой трубки с шариком на нижнем конце. Шарик и часть трубки заполнены ртутью. На трубке или на прикреплённой к ней деревянной линейке наносятся равномерные деления. Среди этих делений есть две основные точки: одна точка обозначена нулём (0) и соответствует она температуре таяния чистого льда; другая точка обозначена числом 100, она соответствует температуре кипения чистой воды. Промежуток между ними разделён на 100 равных частей, каждая из которых называется **градусом.**

Термометры такого типа называются термометрами Цельсия, по имени шведского учёного Андерса Цельсия (1701—1744). Эти термометры применяются в научных и практических измерениях.

## § 58. Денежные единицы.

Стоимость предметов мы выражаем в денежных единицах. Основной денежной единицей у нас является рубль, который содержит 100 копеек.

Деньги бывают металлические и бумажные. Мелкие расчёты производятся с помощью мельхиоровых и бронзовых монет.

Мельхиоровые монеты бывают следующего достоинства: 20 копеек; 15 копеек; 10 копеек.

Бронзовые монеты бывают следующего достоинства: 5 копеек; 3 копейки; 2 копейки; 1 копейка.

Бумажные деньги, носящие название билетов Государственного банка, бывают следующего достоинства: 100 рублей; 50 рублей; 25 рублей; 10 рублей.

Бумажные деньги с надписью «Государственный казначейский билет» бывают следующего достоинства: 5 рублей; 3 рубля; 1 рубль.

## § 59. Наглядное изображение величин.

При решении различных практических задач часто приходится сравнивать рассматриваемые предметы по их величине. Для этой цели мы измеряем каждый предмет, результат измерения выражаем числом и потом сравниваем полученные числа. Более наглядное представление о сравнительной величине предметов даёт чертёж.

Рассмотрим пример. Школьник измерил расстояние от своего дома до различных мест: до школы было 1 *км*, до библиотеки 2 *км*, до реки 3 *км*, до леса 5 *км*, до соседнего села 9 *км*. Он записал эти расстояния в записную книжку, а затем в уменьшённом виде изобразил их на чертеже. На чертеже он изображал 1 *км* отрезком в 1 *см*. Вот что у него получилось (рис. 7).

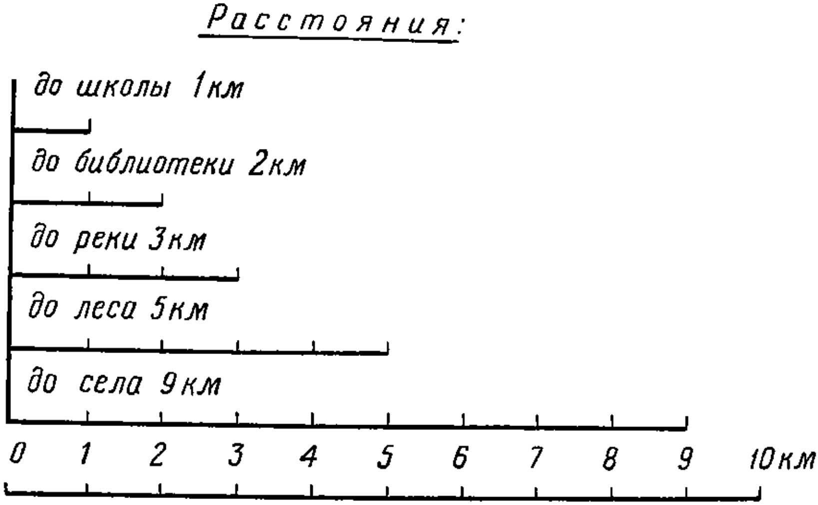


Рис. 7.

Разберитесь в этом чертеже и сделайте такой же чертёж в своей тетради. Узнайте расстояния от вашего дома до школы и до тех мест, куда вам приходится часто ходить или ездить, и изобразите эти расстояния на бумаге.

Чертёж, с которым вы встретились в этом примере, называется **диаграммой.**

Изображённая здесь диаграмма называется **линейной,** потому что для её построения мы пользовались прямыми линиями. Можно придавать диаграммам и другой вид.

Рассмотрим диаграмму, изображающую добычу каменного угля на шести шахтах (рис. 8). Пусть эта добыча выражается следующими числами:

| | |
|---|---|
| Шахта № 1 — 15 000 *т* | Шахта № 4 — 28 000 *т* |
| » № 2 — 12 000 *т* | » № 5 — 21 000 *т* |
| » № 3 — 25 000 *т* | » № 6 — 19 000 *т* |

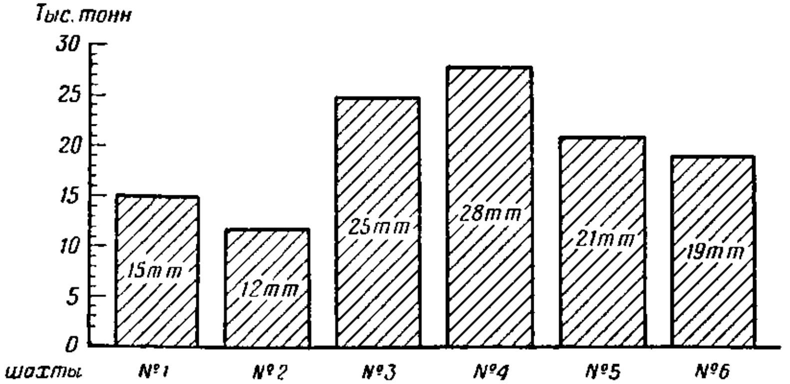


Рис. 8.

Здесь количество угля, добытого каждой шахтой, изображено в форме прямоугольника. Наименьшему количеству угля соответствует самый маленький прямоугольник, а наибольшему — самый большой. Такие диаграммы называются **прямоугольными** или **столбчатыми.**

В газетах, журналах и книгах можно встретить диаграммы, самые разнообразные по своему внешнему виду. Иногда в диаграммах изображают форму того предмета, который рассматривается в данной задаче.

---

Глава шестая.

## Решение задач с геометрическим содержанием и на вычисление времени.

### § 60. Периметр и площадь прямоугольника.

Рассмотрим несколько задач, в которых мы встретимся с описанными выше величинами.

1. Поле имеет форму прямоугольника. Длина его 150 *м*, ширина 80 *м*. Найти длину окружной межи.

Окружная межа этого поля состоит из двух длинных сторон по 150 *м* каждая и двух коротких сторон по 80 *м*. В задаче требуется найти сумму всех этих сторон. Эта сумма равна:

$$150 + 150 + 80 + 80 = 460 \ (м).$$

Сумма всех сторон прямоугольника называется его **периметром.**

2. Бахча имеет форму прямоугольника. Длина его 3 *км* 500 *м*, ширина 2 *км* 500 *м*. Сторож идёт вдоль окружной межи равномерным шагом со средней скоростью 4 *км* в час. Во сколько часов он может обойти окружную межу?

Найдём сначала периметр этого прямоугольника:

3 *км* 500 *м* + 3 *км* 500 *м* + 2 *км* 500 *м* + 2 *км* 500 *м* = 12 *км*.

Найдём время обхода:

$$12 : 4 = 3 \text{ (часа)}.$$

3. Зал имеет форму прямоугольника. Его длина 15 *м* и ширина 8 *м*. Найти площадь его пола. Применяя правило, изложенное в параграфе 54, получим:

$$15 \times 8 = 120 \text{ (}\textit{кв. м}\text{)}.$$

Обозначая длину прямоугольника буквой $a$, ширину $b$ и площадь $S$, получим формулу площади прямоугольника:

$$S = a \cdot b.$$

## § 61. Объём прямоугольного параллелепипеда.

1. Ящик имеет следующие размеры: длина 86 *см*, ширина 60 *см* и высота 50 *см*. Найти объём ящика.

Ящик имеет форму прямоугольного параллелепипеда с указанными выше размерами. Чтобы найти его объём, применим правило, изложенное в параграфе 55:

$$86 \times 60 \times 50 = ?$$
$$86 \times 60 = 5\,160,$$
$$5\,160 \times 50 = 258\,000 \text{ (}\textit{куб. см}\text{)}.$$

Можно написать формулу объёма ($V$) прямоугольного параллелепипеда. Если обозначим его размеры, выраженные в одинаковых единицах измерения: $a$ — длина, $b$ — ширина, $c$ — высота, то формула будет иметь вид:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

2. Классная комната имеет размеры: длина 10 *м*, ширина 6 *м*, высота 4 *м*. Сколько учащихся в этой комнате, если на каждого из них приходится 8 *куб. м* воздуха?

Найдём сначала объём классной комнаты:

$$10 \times 6 \times 4 = 240 \text{ (}\textit{куб. м}\text{)}.$$

Найдём теперь число учащихся:

$$240 : 8 = 30 \text{ (уч.)}.$$

Значит, в этой комнате 30 учеников.

3. Найти вес чугунной плиты, имеющей размеры: длина 180 *см*, ширина 150 *см* и высота 10 *см*, если 1 *куб. см* чугуна весит 7 *г*.

Найдём сначала объём чугунной плиты в сантиметрах:

$$180 \times 150 \times 10 = 270\,000 \text{ (куб. см)}.$$

Вычислим теперь вес этой плиты в граммах:

$$7 \times 270\,000 = 1\,890\,000 \text{ (г)}.$$

Сколько это будет килограммов? 1 890 *кг*.

## § 62. Вычисление времени.

На вычисление времени мы будем рассматривать задачи трёх родов. Их можно охарактеризовать так:

1. Найти продолжительность события, если указаны его начало и конец.

2. Найти время окончания события, если указаны его начало и продолжительность.

3. Найти время начала события, если указаны его продолжительность и время окончания.

### 1. Найти продолжительность события.

З а д а ч а. Постройка железной дороги началась 15 апреля 1947 года, а окончилась 20 июня 1950 года. Сколько времени строилась железная дорога?

Р е ш е н и е. Найдём сначала, сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до 15 апреля 1947 года:

1946 лет, 3 месяца, 14 дней.

Найдём теперь, сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до 20 июня 1950 года:

1949 лет, 5 месяцев, 19 дней.

Вычислим, наконец, сколько лет, месяцев и дней строилась железная дорога:

$$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{rlrlrl} 1949 & \text{лет} & 5 & \text{месяцев} & 19 & \text{дней} \\ 1946 & \text{лет} & 3 & \text{месяца} & 14 & \text{дней} \\ \hline 3 & \text{года} & 2 & \text{месяца} & 5 & \text{дней.} \end{array} \end{array}$$

Железная дорога строилась 3 года, 2 месяца и 5 дней.

### 2. Найти время окончания события.

З а д а ч а. Постройка железной дороги началась 15 апреля 1947 года и продолжалась 3 года, 2 месяца и 5 дней. Когда была окончена постройка железной дороги?

Решение. Найдём сначала, сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до 15 апреля 1947 года:

1946 лет, 3 месяца, 14 дней.

Теперь найдём, сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до окончания события, т. е. до окончания постройки железной дороги:

$$\begin{array}{r} 1946 \text{ лет } 3 \text{ месяца } 14 \text{ дней} \\ + \quad 3 \text{ года } 2 \text{ месяца } 5 \text{ дней} \\ \hline 1949 \text{ лет } 5 \text{ месяцев } 19 \text{ дней.} \end{array}$$

Наконец, ответим на вопрос, когда была окончена постройка железной дороги, или, как говорят, перейдём от арифметического выражения времени к календарному. Получим: железная дорога была окончена 20 июня 1950 года.

**3. Найти время начала события.**

Задача. Постройка железной дороги продолжалась 3 года 2 месяца и 5 дней и была окончена 20 июня 1950 года. Когда была начата постройка этой дороги?

Решение. Найдём сначала, сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до 20 июня 1950 года, т. е. до окончания постройки железной дороги:

1949 лет, 5 месяцев, 19 дней.

Теперь вычислим, сколько лет, месяцев и дней прошло от начала летосчисления до начала постройки железной дороги:

$$\begin{array}{r} 1949 \text{ лет } 5 \text{ месяцев } 19 \text{ дней} \\ - \quad 3 \text{ года } 2 \text{ месяца } 5 \text{ дней} \\ \hline 1946 \text{ лет } 3 \text{ месяца } 14 \text{ дней.} \end{array}$$

Наконец, ответим на вопрос, когда была начата постройка железной дороги. Постройка железной дороги началась 15 апреля 1947 года.

---

Глава седьмая.

# Делимость чисел.

## § 63. Содержание главы.

Мы изучили сложение, вычитание, умножение и деление целых чисел. Сложение и умножение всегда выполнимы независимо от того, над какими числами они выполняются.

Иначе обстоит дело с обратными действиями, т. е. с вычитанием и делением. Относительно вычитания мы говорили, что оно возможно в тех случаях, когда вычитаемое не больше уменьшаемого (стр. 22).

Гораздо больше затруднений связано с делением. Прежде всего возникает затруднение в том случае, когда делимое меньше делителя (14 : 20), но это специальный вопрос, которым мы будем заниматься в следующей части нашей книги. Обратимся к другому случаю. Вы знаете, что деление иногда выполняется без остатка или, как говорят, «нацело», а иногда с остатком. Возникают вопросы: какими должны быть данные числа, чтобы они могли разделиться без остатка одно на другое? Можно ли по каким-нибудь признакам данных чисел установить, что деление в данном случае выполнимо?

## § 64. Кратное и делитель.

Определение. **Если одно число делится без остатка на другое, то первое называется кратным второго, а второе — делителем первого.**

Значит, число 6 будет кратно 3 (трём), а само число 3 будет делителем 6 (шести). Число 15 кратно 5, а само 5 будет делителем 15.

Число может быть кратно нескольким числам. Например число 36 кратно числам: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 и 36.

Числа, делящиеся на 2, называются чётными. Число нуль тоже относится к чётным числам. Все же остальные числа называются нечётными. Следовательно:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12... — чётные,
1, 3, 5, 7, 9, 11... — нечётные.

## § 65. Делимость суммы и разности.

1. Рассмотрим следующее важное **свойство суммы.**

**Если каждое слагаемое делится без остатка на какое-нибудь число, то и сумма разделится на это число.**

Пример:

14 делится на 7,
21 делится на 7,

их сумма 14 + 21, т. е. 35, тоже делится на 7.

Ещё пример:

39 делится на 13,
65 делится на 13,

их сумма 39 + 65 = 104 тоже делится на 13.

Мы можем взять сумму более чем двух слагаемых, например трёх, и высказанное утверждение окажется справедливым:

25 делится на 5,
35 делится на 5,
50 делится на 5.

Сумма $25 + 35 + 50 = 110$ тоже разделится на 5.

Этим свойством суммы мы можем воспользоваться, если хотим узнать, делится ли какое-нибудь число на другое. Например, я хочу узнать, не выполняя деления, разделится ли 756 на 7. Можно поступить так: 756 представить как сумму двух слагаемых $700 + 56$. Теперь нужно подумать, делится ли каждое из этих слагаемых на 7. Здесь уже легко сообразить, что 700 делится на 7 и 56 делится на 7, значит и сумма, т. е. 756, разделится на 7.

Возникает вопрос: если слагаемые не делятся на какое-нибудь число, то разделится ли на это число сумма или нет?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно рассмотреть различные возможные здесь случаи:

а) Слагаемые 21 и 22 не делятся на 5; их сумма 43 тоже не делится на 5.

б) Слагаемые 22 и 23 не делятся на 5; но их сумма 45 делится на 5.

Значит, **если отдельные слагаемые не делятся на данное число, то их сумма в некоторых случаях может разделиться на это число.**

Теперь подумаем, будет ли сумма двух слагаемых делиться на некоторое число, если о д н о из слагаемых не делится на это число, а другое делится.

Пусть одно из слагаемых будет 33, а другое 17, их сумма 50. Первое слагаемое (33) делится на 11, а второе 17 не делится, сумма 50 тоже не делится на 11.

Возьмём сумму трёх слагаемых: 15, 20 и 23, т. е. 58. Каждое из первых двух слагаемых (15 и 20) делится на 5, но третье слагаемое 23 на 5 не делится, сумма 58 тоже не делится на 5.

Из рассмотрения этих примеров можно сделать вывод:

**Если каждое слагаемое, кроме одного, делится на некоторое число, а это одно на него не делится, то сумма всех этих слагаемых на него не разделится.**

Используем этот вывод для решения вопроса о том, разделится ли число 150 на 14. Представим 150 следующим образом:

$$150 = 140 + 10.$$

Первое слагаемое этой суммы (140) делится на 14, но так как второе слагаемое, т. е. 10, на 14 не делится, то и 150 на 14 не разделится.

2. Теперь рассмотрим важное **свойство разности.**

**Если уменьшаемое и вычитаемое делятся нацело на какое-нибудь число, то и разность разделится на это число.**

Пример.

45 делится на 9,
18 делится на 9,

их разность 45—18, т. е. 27, тоже делится на 9.

Ещё пример:

88 делится на 11,
33 делится на 11,

их разность 88—33 = 55 тоже делится на 11.

Этим свойством разности мы можем иногда воспользоваться для выяснения вопросов о делимости одного числа на другое. Пусть требуется ответить на вопрос, делится ли на 7 число 693. Прибавим к нему 7, получим 700. Тогда мы можем написать такое равенство: 700 — 7 = 693. В нём уменьшаемое 700 делится на 7, вычитаемое 7 делится на 7, значит и разность 693 тоже делится на 7.

## § 66. О признаках делимости чисел.

Во многих случаях очень важно бывает определить, не выполняя деления, разделится ли нацело одно число на другое. Пусть требуется, например, ответить на вопрос, будет ли 156 делиться на 4. Такие вопросы в будущем, например при изучении дробей, придётся ставить очень часто. Чтобы ответить на поставленный вопрос, можно, конечно, разделить первое число на второе, но такой приём является невыгодным. Поэтому в арифметике пытаются, не производя деления, узнать, разделится ли одно число на другое нацело или нет. В силу этого мы теперь займёмся изучением таких особенностей или свойств чисел, которые позволяют судить о делимости одного числа на другое. Сейчас мы выведем некоторые из этих «признаков» делимости.

## § 67. Признак делимости на 2.

Какие числа делятся на 2? Чем отличаются числа, делящиеся на 2, от чисел, не делящихся на 2? Возьмём два числа: 35 и 32. Первое из них, т. е. 35, не делится на 2, а 32 делится на 2. В чём же между ними разница? Мы уже знаем из предыдущего, что если каждое из двух чисел делится на третье, то сумма их разделится на это число. Представим данные числа в виде суммы десятков и единиц:

$$35 = 30 + 5,$$
$$32 = 30 + 2.$$

35 составляется из трёх десятков и пяти единиц. Каждый десяток делится на 2, значит и 3 десятка, т. е. 30, разделится на 2, но второе слагаемое, т. е. 5, не делится на 2; именно поэтому и всё число 35 не делится на 2.

Если же мы рассмотрим число 32, то увидим, что оно есть сумма 30 и 2, т. е. таких чисел, из которых каждое делится на 2. Значит, число 32 разделится на 2.

Рассмотрим ещё одно число, причём выберем большее число, чем 32, например 876. Это число мы можем представить так:

$$876 = 870 + 6.$$

Первое слагаемое 870 делится на 2, так как состоит из 87 десятков, второе слагаемое 6 тоже делится на 2, значит и всё число 876 разделится на 2.

Эти примеры показывают, что делимость чисел на 2 зависит исключительно от делимости второго слагаемого (единиц). Ведь число 35 не разделилось на 2 потому, что у него не делилось на 2 второе слагаемое. Если число оканчивается на 0, 2, 4, 6, 8, то оно разделится на 2, в противном случае — не разделится.

На основе изложенного признак делимости на 2 мы можем высказать так: **на 2 делятся те и только те числа, которые оканчиваются чётной цифрой.** (Нуль относится к чётным числам.)

## § 68. Признак делимости на 4.

Прежде всего установим такой факт; на 4 делится число 100 и, следовательно, всякое число, представляющее собой сумму сотен (200, 300, ..., 1 400, 1 500, ..., 2 000, ...). Но всякое число, являющееся суммой сотен, оканчивается двумя нулями. Значит, на 4 делится всякое число, оканчивающееся двумя нулями.

Возьмём теперь число, которое оканчивается не нулями, а какими-нибудь другими цифрами, например 123 456.

Представим его как сумму двух слагаемых следующим образом:

$$123\,400 + 56.$$

Первое слагаемое этой суммы (123 400) разделится на 4, так как оно оканчивается двумя нулями. Если второе слагаемое (56) разделится на 4, то и сумма (123 456) разделится на 4. Второе слагаемое 56 делится на 4. Значит, и число 123 456 разделится на 4.

Возьмём число 1 634 и представим его как сумму двух слагаемых так: 1 600 + 34. Первое слагаемое этой суммы 1 600 делится на 4, но второе (34) не делится. Значит, сумма, т. е. число 1 634, на 4 не разделится.

Таким образом, **на 4 делятся те и только те числа, которые оканчиваются двумя нулями или у которых две последние цифры выражают число, делящееся на 4.**

Например делятся на 4: 4 600, 1 264; не делятся на 4: 110, 4 562.

## § 69. Признак делимости на 5.

Прежде всего отметим, что на 5 делится число 10 и, значит, всякое число, состоящее из десятков (20, 30, ..., 140, 150, ..., 2 160, 2 170, ...).

С другой стороны, всякое многозначное число можно рассматривать как сумму десятков и единиц.

Первое слагаемое, как состоящее из одних десятков, всегда разделится на 5. Значит, делимость всякого многозначного числа на 5 будет зависеть исключительно от делимости на 5 второго слагаемого, т. е. единиц числа.

Но среди единиц есть единственное число, делящееся на 5, — это самое число 5. Следовательно, у чисел, делящихся на 5, вторым слагаемым может быть только число 5.

Если же мы возьмём, например, число 2 347, у которого на месте единиц стоит не 5, а 7, то это число не разделится на 5, так как в сумме 2 340 + 7 первое слагаемое делится, а второе слагаемое (7) не делится на 5.

В силу этого признак делимости на 5 можно высказать так: **на 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются нулём или цифрой 5.**

Например, на 5 делятся: 1 320; 4 065; на 5 не делятся: 21; 432; 6 543.

## § 70. Признак делимости на 25.

Число 100 делится на 25. Следовательно, и всякое число, составленное из сотен, должно делиться на 25 (200, 300, ..., 1 400, 1 500, ..., 5 600, ...). Но так как число, состоящее из сотен, оканчивается двумя нулями, то на 25 должны делиться все числа, оканчивающиеся двумя нулями.

Теперь возьмём два числа, оканчивающиеся не нулями, а какими-нибудь другими цифрами:

$$23\,456 \text{ и } 34\,875.$$

Каждое из них можно представить в виде двух слагаемых так:

$$23\,400 + 56 \text{ и } 34\,800 + 75.$$

В первом случае второе слагаемое (56) не делится на 25, поэтому и всё число (сумма) не делится на 25. Во втором случае второе слагаемое (75) делится на 25, поэтому всё число разделится на 25. Значит, делимость числа на 25 зависит от деления на 25 числа, составленного двумя последними цифрами. Но в пределах сотни есть только три таких числа: 25, 50 и 75.

На этом основании мы можем сказать, что **на 25 делятся те и только те числа, которые оканчиваются на 00; 25; 50 и 75.**

## § 71. Признаки делимости на 9 и на 3.

Какие числа делятся на 9? Прежде всего на 9 делятся все числа, которые написаны посредством цифры 9, т. е.

$$9;\ 99;\ 999;\ 9\,999 \text{ и т. д.}$$

Далее, запомним, что числа изображаемые единицей с нулями, при делении на 9 дают в остатке 1. В самом деле: $10 : 9 = 1$ и 1 в остатке; $100 : 9 = 11$ и 1 в остатке; $1\,000 : 9 = 111$ и 1 в остатке; $10\,000 : 9 = 1\,111$ и 1 в остатке.

Приняв это во внимание, разделим на 9 число 567. Представим его в виде суммы разрядных единиц:

$$567 = 500 + 60 + 7.$$

Число 500 при делении на 9 даёт в остатке пять (5) единиц, потому что каждая сотня при делении на 9 даёт в остатке 1.

Число 60 при делении на 9 даёт в остатке шесть (6) единиц, потому что каждый десяток при делении на 9 даёт в остатке 1.

Число семь (7) не делится на 9 и тоже является остатком.

Таким образом, у нас получились следующие остатки: 5, 6 и 7.

Если сумма этих остатков, т. е. $5 + 6 + 7 = 18$, разделится на 9, то и число 567 разделится на 9. В данном случае сумма остатков на 9 делится.

Если же мы возьмём другое число, например 476, у которого сумма остатков, как легко сообразить на основании предыдущего, будет:

$$4 + 7 + 6 = 17,$$

то здесь сумма остатков на 9 не делится; значит, и всё число (476) на 9 не разделится.

Но что представляет собой эта сумма остатков? Это есть сумма чисел, соответствующих цифрам данного числа (ради краткости говорят, что это есть сумма цифр числа).

Поэтому признак делимости на 9 можно высказать так: **на 9 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.**

Всякое число, делящееся на 9, будет делиться и на 3 (но не наоборот). Мы могли бы провести подобные рассуждения, применительно к числу 3. Тогда признак делимости на 3 был бы высказан так: **на 3 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3.** Например, на 3 делятся: 51; 231; 8 112; 12 345.

---

Глава восьмая.

# Простые множители. Делители и кратные.

## § 72. Числа простые и составные.

Возьмём несколько чисел и посмотрим, на какие числа делится каждое из них.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | делится | на | 1 и на 5; |
| 6 | » | » | 1, на 2, на 3 и на 6; |
| 9 | » | » | 1, на 3 и на 9; |
| 11 | » | » | 1 и на 11; |
| 12 | » | » | 1, на 2, на 3, на 4, на 6 и на 12. |

Мы видим, что эти числа отличаются одно от другого числом делителей. У числа 12 оказалось наибольшее число делителей (6), а у чисел 5 и 11 — наименьшее, именно у каждого из них только два делителя: 1 и само это число.

**Всякое число, кроме единицы, которое делится только на единицу и само на себя, называется простым.**

Число, которое делится не только на единицу и само на себя, но ещё и на другие числа, называется **составным.**

Примечание. Число 1 (единица) не причисляется ни к простым, ни к составным числам.

В пределах первой сотни, т. е. от 1 до 100, насчитывается 25 простых чисел, а именно: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

На первый взгляд может показаться, что простых чисел довольно много только в начале натурального ряда, т. е. пока числа сравнительно не велики, и что с увеличением чисел простые числа станут постепенно редеть и, наконец, совсем исчезнут. Но такое предположение неверно, в действительности существует бесчисленное множество простых чисел.

Как узнать, будет ли какое-нибудь число простым или составным? Чтобы решить этот вопрос, берут данное число и делят его последовательно на простые числа, начиная с числа 2.

В настоящее время составлены таблицы простых чисел, простирающиеся до миллионов.

Мы даём здесь таблицу простых чисел в пределах двух первых сотен. Таких чисел всего 46. Мы расположили их так, что в каждой строке стоят простые числа одного десятка. Значит, в первой строке имеются простые числа только первого десятка, во второй строке — только второго и т. д.

| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — | 2 | 3 | — | 5 | — | 7 | — | — | — |
| 11 | — | 13 | — | — | — | 17 | — | 19 | — |
| — | — | 23 | — | — | — | — | — | 29 | — |
| 31 | — | — | — | — | — | 37 | — | — | — |
| 41 | — | 43 | — | — | — | 47 | — | — | — |
| — | — | 53 | — | — | — | — | — | 59 | — |
| 61 | — | — | — | — | — | 67 | — | — | — |
| 71 | — | 73 | — | — | — | — | — | 79 | — |
| — | — | 83 | — | — | — | — | — | 89 | — |
| — | — | — | — | — | — | 97 | — | — | — |
| 101 | — | 103 | — | — | — | 107 | — | 109 | — |
| — | — | 113 | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | — | — | — | — | 127 | — | — | — |
| 131 | — | — | — | — | — | 137 | — | 139 | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 149 | — |
| 151 | — | — | — | — | — | 157 | — | — | — |
| — | — | 163 | — | — | — | 167 | — | — | — |
| — | — | 173 | — | — | — | — | — | 179 | — |
| 181 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 191 | — | 193 | — | — | — | 197 | — | 199 | — |

Советуем рассмотреть эту таблицу, обратив особое внимание на то, что не существует простых чисел, оканчивающихся на 4, 6, 8, 0, и что среди простых чисел, оканчивающихся на 2, имеется только одно число — это само 2, и из оканчивающихся на 5 — одно число, т. е. 5. Следовательно, кроме 2 и 5, все остальные простые числа оканчиваются на 1, 3, 7, 9.

Предостерегаем от возможной ошибки: нельзя считать, что числа, оканчивающиеся на 1, 3, 7, 9, обязательно будут простыми, например числа 21, 33, 27, 39 и многие другие — составные.

Составлением таблиц простых чисел занимались математики ещё в глубокой древности. Первая попытка такого рода приписывается александрийскому математику и географу Эратосфену (жил в III веке до н. э.). Способ Эратосфена состоит в том, что из ряда натуральных чисел постепенно вычёркиваются все составные числа. Такой способ составления таблицы простых чисел получил название «решета Эратосфена».

## § 73. Разложение чисел на простые множители.

Всякое составное число можно представить в виде произведения простых чисел. Покажем это сначала на небольших числах. Число 4 делится на 2 и даёт в частном 2. Так как делимое равно делителю, умноженному на частное, то можно написать: $4 = 2 \cdot 2$. Число 6 делится на 2 и даёт в частном 3, поэтому можно написать: $6 = 2 \cdot 3$. Возьмём ещё пример:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Здесь оказалоcь 3 простых множителя (три двойки). Произошло это следующим образом. Сначала мы разделили 8 на 2 и получили в частном 4, но так как 4 тоже есть составное число, то мы и его представили в виде произведения двух двоек. Этот процесс можно записать так:

$$8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Приведём ещё несколько примеров без объяснений:

$$9 = 3 \cdot 3; \quad 10 = 2 \cdot 5; \quad 15 = 3 \cdot 5; \quad 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Мы брали составные числа и каждое из них представляли в виде произведения простых чисел. Такое преобразование числа называется разложением на простые множители. Таким образом, **разложить число на простые множители — значит представить его в виде произведения простых чисел.**

**Составное число разлагается на простые множители единственным образом.** Это значит, что если, например, число 20 разложилось на две двойки и одну пятёрку, то оно и всегда будет так разлагаться независимо от того, начнём ли мы разложение с малых множителей или с больших. Принято начинать разложение с малых множителей, т. е. с двоек, троек и т. д. Это удобнее потому, что о делимости числа на 2, на 3, на 5 легче судить, чем о делимости его, например, на 37 или 53.

Как же выполняется разложение на множители? Возьмём число 24 и разложим его на множители. Начнём с наименьшего делителя; число 24 делится на 2 и даёт в частном 12; в свою очередь 12 делится на 2 и даёт в частном 6; далее, число 6 делится снова на 2 и даёт в частном простое число 3. Значит, разложение представится в таком виде:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

При выполнении разложения нужно рассуждать следующим образом: 24 равняется двум (пишем 2), умноженным на 12 (12 не пишем, а держим в уме); 12 равняется двум (пишем 2), умноженным на 6 (6 помним); 6 равняется двум, умноженным на 3 (пишем 2 и 3).

Разложение больших чисел по существу ничем не отличается от разложения малых. Разложим на простые множители число 100:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

В арифметике имеется ещё другая форма записи, облегчающая разложение больших чисел: она состоит в том, что пишутся не только делители, но и частные, а сами множители располагаются не в строку, а в столбик. Разложим, например, на простые множители число 1 260. Проведём правее этого числа вертикальную черту и за ней напишем первый его наименьший делитель, больший единицы. Это будет 2. Разделим наше число на 2 и напишем частное 630 левее черты под данным числом. Найдём теперь наименьший делитель для 630, разделим на него это число, а частное запишем опять слева. Делитель будет 2, а частное 315. Дальнейшие действия выполняются совершенно так же. В конце мы получаем в частном простое число (7), делим его на 7 и находим последнее частное (1). Дадим ещё несколько образцов разложения «в столбик» больших чисел:

$$\begin{array}{r|l} 1\,260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 5\,390 & 2 \\ 2\,695 & 5 \\ 539 & 7 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,310 & 2 \\ 1\,155 & 3 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

После разложения «в столбик» следует множители выписать в строчку, например:

$$5\,390 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11.$$

В некоторых случаях в целях облегчения можно предварительно разложить большое число на какие-нибудь удобные множители, которые легко обнаруживаются. Например, число 3 600 можно сначала разложить так: 3 600 = 36 · 100, а затем отдельно разложить 36 и 100, т. е.

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3; \qquad 100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Следовательно,

$$3\,600 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

П р и м е ч а н и е. Простые множители обычно записывают в порядке их возрастания.

Вы, конечно, заметили, что удобно выделять множитель, оканчивающийся нулями. В связи с этим полезно запомнить, как разлагаются на множители числа, изображаемые единицей с нулями. Все такие числа разлагаются только на двойки и пятёрки, причём двоек и пятёрок получается поровну, т. е. сколько двоек, столько и пятёрок. Например:

$$10 = 2 \cdot 5,$$
$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$$
$$1\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5,$$
$$10\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Так как двоек или пятёрок столько, сколько число имеет нулей, то эти разложения легко запоминаются.

## § 74. Краткая запись разложения на множители.

Из приведённых примеров разложения чисел на простые множители видно, что каждое число имеет свой собственный и вполне определённый состав множителей. Если среди множителей числа есть равные, то можно пользоваться очень удобной сокращённой формой записи. Разложим на простые множители два числа, 30 и 32:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,$$
$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Множители первого числа все различны, множители второго все одинаковы. В первом случае нет возможности короче записать разложение, а во втором случае такая возможность есть: повторяющийся множитель пишется один раз, а число, показывающее, сколько раз он повторяется, пишется сверху, справа от него, мелкими цифрами:

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$$

Покажем ещё пример. Разложим на простые множители число 729:

$$729 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6.$$

В конце предыдущего параграфа мы показали разложение на простые множители чисел, изображаемых единицей с нулями. Теперь мы можем такие разложения написать короче:

$$10 = 2 \cdot 5; \qquad 10\,000 = 2^4 \cdot 5^4;$$
$$100 = 2^2 \cdot 5^2; \qquad 100\,000 = 2^5 \cdot 5^5;$$
$$1\,000 = 2^3 \cdot 5^3; \qquad 1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6.$$

Как следует ч и т а т ь подобные записи? Возьмём число 625 и разложим его на простые множители:

$$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5, \text{ или } 625 = 5^4.$$

Смысл последнего равенства состоит в том, что в разложение на простые множители числа 625 множитель 5 входит 4 раза, или, иными словами, число 625 разлагается на четыре пятёрки. Запись $5^4$ читают так: пять в четвёртой **степени.** Запомните, что

$10^2$ читается: 10 во второй степени;
$9^3$ » 9 в третьей степени;
$8^4$ » 8 в четвёртой степени.

Конечно, нужно не только уметь читать то, что здесь написано, но и знать, сколько получается в каждом отдельном случае. Сделаем вычисление: $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$. Это равенство можно записать в обратном порядке, т. е. справа налево: $100 = 10^2$.

Выполним остальные вычисления:

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729, \text{ отсюда: } 729 = 9^3;$$
$$8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4\,096, \text{ отсюда: } 4\,096 = 8^4.$$

Таким образом, здесь наметились две задачи. Первая состоит в том, чтобы, имея некоторое число, разложить его на простые множители, т. е. представить в виде произведения простых чисел. Например, разложить 720 на простые множители:

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Вторая задача, обратная первой, состоит в том, чтобы по данному разложению какого-то числа на простые множители восстановить это число. Например, даётся разложение: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Выясним, какое число представляет это разложение. Для этого выполним указанные действия:

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 7 = 12\,600.$$

Вместо того чтобы писать $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, можно, как вы знаете, написать $10^5$ и читать эту запись так: 10 в пятой степени. В этой записи всего два числа: 10 и 5. Первое из них (10) в таком случае называется **основанием степени,** а второе (5) — **показателем степени.** Само же произведение одинаковых сомножителей называется **степенью.** Значит, в данном случае степень будет равна 100 000, потому что $10^5 = 100\,000$.

Значит, если мы напишем $2^{10} = 1\,024$, то здесь 2 будет основанием степени, 10 — показателем степени и число 1 024 будет степенью.

## § 75. Наибольший общий делитель.

Возьмём три числа: 60, 90 и 120. Каждое из них делится на 30. Значит число 30 есть делитель каждого из них. Принято говорить, что число 30 есть общий делитель чисел: 60, 90 и 120.

В дальнейшем нам часто придётся искать общий делитель для двух, трёх и т. д. чисел. Запомним, что **общим делителем нескольких чисел называется число, на которое все данные числа делятся без остатка.**

Заметим, что у некоторых чисел может вовсе не быть общих делителей, кроме единицы, а у иных их может быть несколько. Например, числа 27 и 32 не имеют общих делителей, кроме 1;

числа 25 и 35 имеют общие делители: 1 и 5;

числа 42 и 105 имеют общие делители: 1, 3, 7 и 21;

числа 21, 35 и 49 имеют общие делители: 1 и 7.

**Числа, не имеющие общих делителей** (кроме единицы), **называются взаимно простыми.**

Возьмём два числа: 60 и 75, и посмотрим, какие у них общие делители. Число 60 делится на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30; число 75 делится на 1, 3, 5, 15, 25. Значит у этих чисел только четыре общих делителя, это 1, 3, 5 и 15.

Наибольший из этих общих делителей есть число 15, которое и называется наибольшим общим делителем чисел 60 и 75.

**Наибольшим общим делителем нескольких чисел называется самое большое число, на которое делятся все эти числа.**

Выше мы указали, какие числа называются взаимно простыми; теперь ту же мысль мы выразим иначе.

**Два числа, у которых наибольший общий делитель есть единица, называются взаимно простыми.**

Как найти наибольший общий делитель нескольких чисел?

Возьмём сначала два числа: 63 и 84, и найдём их наибольший общий делитель. Разложим эти числа на простые множители:

$$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7;\ 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Чтобы оба эти числа делились на некоторое третье число, необходимо, чтобы в это последнее входили множители, *общие* двум данным числам; наибольший общий делитель получится от перемножения всех *простых общих множителей*. Общими множителями у данных чисел являются 3 и 7. Значит, наибольший общий делитель этих чисел (63 и 84) будет 21. Сокращённо это записывают так:

$$\text{НОД } (63 \text{ и } 84) = 21.$$

Рассмотрим ещё один пример. Найдём наибольший общий делитель трёх чисел: 420, 630 и 1 260. Разложим каждое из этих чисел на простые множители:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 420 | 2 | 630 | 2 | 1 260 | 2 |
| 210 | 2 | 315 | 3 | 630 | 2 |
| 105 | 3 | 105 | 3 | 315 | 3 |
| 35 | 5 | 35 | 5 | 105 | 3 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 35 | 5 |
| 1 | | 1 | | 7 | 7 |
| | | | | 1 | |

Выпишем множители, общие этим трём числам. Число 2 входит общим множителем во все три данные числа, но только один раз; второй раз множитель 2 входит в первое и третье число, но не входит в 630. Число 3 один раз входит во все данные числа, но второй раз входит только в последние два числа. Числа 5 и 7 входят множителями во все данные числа. Значит, общими множителями являются следующие: 2, 3, 5, 7. Их произведение, т. е. 210, и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Отсюда вытекает правило:

**Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, нужно разложить эти числа на простые множители и, взяв множители, общие всем числам, перемножить их между собой.**

## § 76. Наименьшее общее кратное.

Мы говорили в своё время (§ 64), что если одно число без остатка делится на другое, то первое называется кратным второго, а второе — делителем первого. Число 60, делящееся на 15, называется кратным 15-ти, а 15 — делителем 60-ти.

Но число 60 делится не только на 15, но и на некоторые другие числа, например на 20, на 30 и т. д. Значит, мы имеем право говорить, что 60 кратно не только 15, но и 20, и 30.

Для каждого числа существует бесконечное множество кратных. Например, для числа 7 кратными являются: 14, 21, 35, 70, 77 и т. д.

Для двух или нескольких чисел тоже существует множество кратных. Например, для чисел 12 и 20 кратными будут числа: 60, 120, 180, 240, 300 и т. д.

Все они являются общими кратными для чисел 12 и 20.

**Общим кратным данных чисел называется всякое число, которое делится на каждое из данных чисел.**

Из всех общих кратных особый интерес представляет наименьшее общее кратное.

**Наименьшим общим кратным нескольких данных чисел называется самое меньшее число, которое делится на каждое из этих чисел.**

Например, для чисел 10 и 15 наименьшим общим кратным (сокращённо НОК) будет число 30; для чисел 12 и 18 таковым будет число 36; для чисел 10, 15 и 20 — очевидно, число 60.

Пусть требуется найти наименьшее общее кратное чисел 90, 60 и 50. Разложим предварительно эти числа на простые множители:

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5,$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$
$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Наименьшее общее кратное должно делиться на 90, значит, в состав его должны входить все множители числа 90. Далее, наименьшее кратное должно делиться и на 60, т. е. в его состав должны входить множители и этого числа, наконец, одновременно с этим оно должно делиться и на последнее число — 50, следовательно, оно должно содержать множители и этого последнего числа. Учитывая все эти обстоятельства, поступим так: выпишем сначала все множители первого числа (90), а затем, чтобы обеспечить делимость искомого кратного на остальные числа, добавим к написанным множителям из других чисел те множители, которых недостаёт в разложении числа 90. Получим следующее:

$$\text{НОК }(90,\ 60,\ 50) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 900.$$

Отсюда получаем правило:

**Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители, затем, взяв разложение одного из них, приписать к нему недостающие простые множители из разложений других чисел и перемножить их между собой.**

Если большее из данных чисел делится на все остальные, то оно и будет наименьшим кратным для этих чисел. Например, наименьшим общим кратным чисел 120, 60 и 40 будет 120.

Если никакая пара данных чисел не имеет общих множителей, то для нахождения наименьшего общего кратного данных чисел их нужно перемножить. Например, наименьшее общее кратное чисел 11, 14 и 15 равно их произведению, т. е.

$$\text{НОК }(11,\ 14,\ 15) = 11 \cdot 14 \cdot 15 = 2\,310.$$

## *Часть вторая.*

# Обыкновенные дроби.

Глава девятая.

## Основные понятия.

### § 77. О долях единицы.

Мы изучили свойства целых чисел и действия над ними. Кроме целых чисел, существуют числа дробные, с которыми мы сейчас ознакомимся. Когда ученик говорит, что ему от дома до школы полчаса ходьбы, то он выражает время не в целых часах, а в частях часа. Когда врач рекомендует больному растворить порошок в четверти стакана горячей воды, то здесь вода измеряется не целыми стаканами, а частями стакана. Если один арбуз нужно разделить поровну между тремя мальчиками, то каждый из них может получить только треть арбуза, или третью его часть.

Во всех случаях мы говорили не о целых единицах, а о частях, или долях единицы. Доли могут быть самые разнообразные, например грамм есть тысячная доля килограмма, миллиметр — миллионная доля километра. Сначала мы будем говорить о наиболее простых долях (половина, треть, четверть и т. д.).

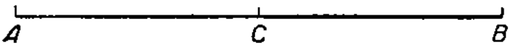


Рис. 9.

Для большей наглядности будем изображать эти доли отрезками прямой линии.

Если отрезок $AB$ примем за единицу (рис. 9), то, разделив его на две равные части, мы можем сказать, что полученные отрезки $AC$ и $CB$ будут половинами отрезка $AB$.

Далее, если отрезок $DE$ (рис. 10) примем за единицу и разделим его на 3 равные части, то каждый из полученных отрезков $DF$,

$FH$, $HE$ будет равен одной трети отрезка $DE$, а отрезок $DH$ будет равен двум третям отрезка $DE$. Точно так же отрезок $FE$ будет равен двум третям отрезка $DE$.

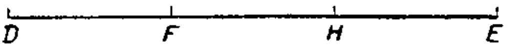


Рис. 10.

Возьмём ещё отрезок $MN$ (рис. 11), примем его за единицу и разделим на четыре равные части; тогда каждый из отрезков $MP$, $PQ$, $QR$, $RN$ будет равен одной четверти отрезка $MN$; каждый из отрезков $MQ$, $PR$, $QN$ будет равен двум четвертям его, а каждый из отрезков $MR$ и $PN$ равен трём четвертям $MN$.

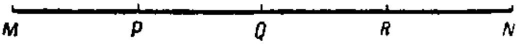


Рис. 11.

В рассмотренных примерах мы ознакомились с половиной, третью, четвертью, двумя третями, двумя четвертями, тремя четвертями, т. е. либо с одной долей единицы, либо с двумя, либо с тремя равными долями единицы.

Число, составленное из одной или нескольких равных долей единицы, называется **дробью.**

Мы уже сказали, что вместо слова «доля» можно говорить слово «часть»; поэтому дробью можно назвать число, выражающее одну или несколько одинаковых частей единицы.

Таким образом, названные в этом параграфе числа: половина, или одна вторая, одна треть, одна четверть, две трети и прочие, будут дробями.

Часто приходится рассматривать не только доли предметов, но вместе с ними и целые предметы. Например, два мальчика решили разделить поровну имеющиеся у них пять яблок. Очевидно, каждый из них возьмёт сначала по два яблока, а оставшееся последнее яблоко они разрежут на две равные части. Тогда у каждого будет по два с половиной яблока. Здесь число яблок у каждого мальчика выражается целым числом (два) с некоторой дробью (половина).

Числа, в состав которых входит целое число и дробь, называются **смешанными числами.**

## § 78. Изображение дробей.

Рассмотрим последний чертёж предыдущего параграфа (рис. 11). Мы говорили, что отрезок $MR$ составляет три четверти отрезка $MN$. Теперь возникает вопрос, как эту дробь, т. е. три четверти, записать с помощью цифр. Припомним, как возникла дробь три четверти. Мы приняли отрезок $MN$ за единицу, разделили его на 4 равные части и из этих частей взяли 3. Вот этот процесс возникновения дроби и должен быть отражён в её записи, т. е. из этой записи должно быть видно, что единица разделена на 4 равные части и полученных частей взято 3. В силу этого дробь изображают с помощью двух чисел, разделённых горизонтальной чёрточкой. Под чёрточкой пишется число, указывающее, на сколько равных частей разделена единица, от которой берётся дробь, а над чертой пишется другое число, показывающее, сколько долей содержится в данной дроби. Дробь три четверти будет записана так: $\frac{3}{4}$.

Число, стоящее над чертой, называется **числителем** дроби; это число показывает число долей, содержащихся в данной дроби.

Число, стоящее под чертой, называется **знаменателем** дроби; оно показывает, на сколько равных частей разделена единица.

$$\frac{3 \text{ — числитель,}}{4 \text{ — знаменатель.}}$$

Чёрточка, отделяющая числитель от знаменателя, называется дробной чертой. Числитель и знаменатель оба вместе называются членами дроби. Напишем в качестве примера дроби:

две трети — $\frac{2}{3}$; пять двенадцатых — $\frac{5}{12}$.

Смешанные числа записывают так: сначала пишут целое число и рядом с ним справа приписывают дробь. Например, смешанное число два и четыре пятых нужно записать так: $2\frac{4}{5}$.

## § 79. Возникновение дробей.

Рассмотрим вопрос о том, как и откуда возникают дроби, почему и при каких обстоятельствах они появляются.

Возьмём, например, такой факт. Нужно измерить при помощи метра длину классной доски. Мы берём метровую деревянную линейку и прикладываем её вдоль нижнего края доски, перемещаясь слева направо. Пусть она уложилась два раза, но ещё осталась некоторая часть доски, где линейка в третий раз уже не уложится, потому что длина оставшейся части меньше длины линейки.

Если в оставшейся части доски содержится, например, половина метра, то длина доски равняется двум с половиной $\left(2\frac{1}{2}\right)$ метрам.

Будем теперь измерять ширину доски той же самой линейкой. Допустим, что она уложилась один раз, но после этого единственного откладывания осталась небольшая часть доски, длиной меньше метра. Прикладывая метр к этой части доски, положим, удалось обнаружить, что она равна одной четверти $\left(\frac{1}{4}\right)$ метра. Значит, вся ширина доски равна $1\frac{1}{4}$ *м*.

Таким образом, при измерении длины и ширины доски мы получили числа $2\frac{1}{2}$ *м* и $1\frac{1}{4}$ *м* (т. е. дробные числа).

Не только длина и ширина предметов, но и очень многие другие величины выражаются часто дробными числами.

Время мы измеряем не только в часах, минутах и секундах, но нередко и в частях часа, в частях минуты и даже в частях секунды.

Очень часто дробными числами выражают вес, например, говорят: $\frac{1}{2}$ *кг*, $1\frac{1}{2}$ *кг*, $\frac{1}{2}$ *г*, $\frac{3}{4}$ *г*, $\frac{1}{2}$ *т* и т. д.

До сих пор мы говорили о происхождении дробей от измерения, но существует ещё один источник возникновения дробей — это действие деления. Остановимся на этом. Пусть требуется 3 яблока разделить между 4 мальчиками; очевидно, в этом случае каждый мальчик не получит целого яблока, потому что яблок меньше, чем детей. Возьмём сначала 2 яблока и разрежем каждое пополам. Получится 4 половины, а так как мальчиков четыре, то каждому можно дать по половине яблока. Оставшееся третье яблоко разрежем на 4 части и тогда добавим каждому мальчику к тому, что он имеет, ещё по четверти. Тогда все яблоки будут распределены и каждый мальчик получит по одной половине да ещё по одной четверти яблока. Но так как в каждой половине содержится по 2 четверти, то окончательно можно сказать, что каждому мальчику придётся по две четверти и плюс по одной четверти, т. е. всего по три четверти $\left(\frac{3}{4}\right)$ яблока.

## § 80. Сравнение дробей по величине.

Если мы сравниваем между собой какие-нибудь величины, например два отрезка, то может оказаться, что один из них в точности равен другому, или он больше другого, или меньше другого.

На рисунке 12 отрезок $AB$ равен отрезку $CD$; отрезок $EF$ больше отрезка $QH$; отрезок $KL$ меньше отрезка $MN$.

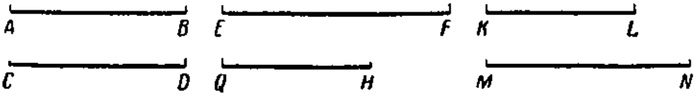


Рис. 12.

Такие же три случая мы встретим и при сравнении дробей. Попробуем сравнить между собой некоторые дроби.

1. Две дроби считаются равными, если величины, соответствующие этим дробям, равны между собой (при одной и той же единице измерения). Возьмём отрезок $CK$ и примем его за единицу.

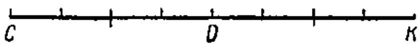


Рис. 13.

Разделим отрезок $CK$ пополам точкой $D$ (рис. 13). Тогда часть этого отрезка $CD$ мы обозначим дробью $\frac{1}{2}$. Если тот же отрезок $CK$ мы разделим на 4 равные части, то отрезок $CD$ выразится дробью $\frac{2}{4}$; если же мы разделим отрезок $CK$ на 8 равных частей, то отрезку $CD$ будет соответствовать дробь $\frac{4}{8}$. Так как мы три раза брали один и тот же отрезок, то дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ и $\frac{4}{8}$ равны между собой.

2. Возьмём две дроби с равными числителями: $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$, и посмотрим, какие величины им соответствуют. В первом случае некоторая величина разделена на 4 равные части, а во втором случае она же разделена на 8 равных частей.

Рисунок 14 показывает, что $\frac{1}{4}$ больше $\frac{1}{8}$. Следовательно, из двух дробей с одинаковыми числителями та дробь больше, у которой знаменатель меньше.

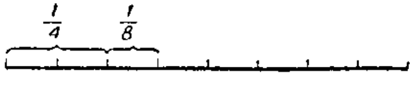


Рис. 14.

3. Возьмём две дроби с равными знаменателями: $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{8}$. Если мы отметим на предыдущем чертеже каждую из этих дробей, то

увидим, что отрезок, соответствующий первой дроби, больше отрезка, соответствующего второй. Значит, из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой числитель больше.

4. Если даются две дроби с разными числителями и знаменателями, то судить об их величине можно путём сравнения каждой из них с единицей. Например, $\frac{2}{3}$ меньше $\frac{4}{5}$, потому что первая дробь отличается от единицы на $\frac{1}{3}$, а вторая на $\frac{1}{5}$, т. е. у второй дроби меньше недостаёт до единицы, чем у первой.

Однако легче всего сравнивать такие дроби путём приведения их к общему знаменателю, о чём будет сказано ниже.

## § 81. Дроби правильные и неправильные. Смешанные числа.

Возьмём отрезок $AB$, равный двум каким-нибудь линейным единицам (рис. 15). Разделим каждую единицу на 10 равных частей, тогда каждая часть будет равна $\frac{1}{10}$, т. е.

$$AD = DE = EF = FH = \ldots = \frac{1}{10}AC.$$

Рассмотрим другие отрезки и подумаем, какими дробями они выражаются. Например, $AF$ — $\frac{3}{10}$, $AK$ — $\frac{5}{10}$, $AM$ — $\frac{7}{10}$; $AO$ — $\frac{9}{10}$, $AC$ — $\frac{10}{10}$, $AP$ — $\frac{11}{10}$, $AR$ — $\frac{13}{10}$. Все взятые отрезки мы выразили дробными числами со знаменателем 10. У первых четырёх дробей $\left(\frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right)$ числители меньше знаменателей, каждая из них меньше 1. У пятой по порядку дроби $\left(\frac{10}{10}\right)$ числитель равен знаменателю, а сама дробь равна 1, она соответствует отрезку $AC$, принятому за единицу. У двух последних дробей $\left(\frac{11}{10}, \frac{13}{10}\right)$ числители больше знаменателей, а каждая дробь больше 1.


Рис. 15.

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называется **правильной дробью.** Как сказано выше, правильная дробь меньше единицы. Значит, первые четыре дроби — правильные и поэтому можно написать: $\frac{3}{10} < 1$, $\frac{5}{10} < 1$, $\frac{7}{10} < 1$, $\frac{9}{10} < 1$.

Дробь, у которой числитель равен знаменателю или больше его, называется **неправильной дробью.** Таким образом, неправильная дробь или равна единице, или больше её. Значит, три последние дроби — неправильные и можно написать:

$$\frac{10}{10} = 1, \ \frac{11}{10} > 1, \ \frac{13}{10} > 1.$$

Остановимся на двух последних (неправильных) дробях. Дробь $\frac{11}{10}$ состоит из одной целой единицы и правильной дроби $\frac{1}{10}$, значит, её можно написать так: $1\frac{1}{10}$. Получилось число, представляющее собой соединение целого числа и правильной дроби, т. е. смешанное число. То же самое можно повторить и относительно неправильной дроби $\frac{13}{10}$. Её мы можем представить как $1\frac{3}{10}$. Это тоже будет смешанное число.

Необходимо научиться заменять неправильную дробь смешанным числом. Две предыдущие неправильные дроби мы легко заменили смешанными числами. Но если бы нам встретилась дробь, например $\frac{545}{32}$, то выделить из неё целую часть сложнее, а без выделения целой части трудно судить о величине этого числа.

С другой стороны, при выполнении различных вычислений иногда удобнее пользоваться не смешанными числами, а неправильными дробями. Значит, нужно уметь в случае надобности делать и обратное преобразование, т. е. заменять смешанное число неправильной дробью.

## § 82. Обращение неправильной дроби в смешанное число и обратное преобразование.

Возьмём неправильную дробь $\frac{9}{4}$ и попробуем заменить её смешанным числом. Будем рассуждать так: если в одной единице заключено 4 четверти, то в 9 четвертях заключается столько целых единиц, сколько раз 4 четверти содержатся в 9 четвертях. Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно 9 разделить на 4. Полученное частное укажет число целых, а остаток даст число четвертей, не составляющих целой единицы. 4 содержится в 9 два раза с остатком, равным 1.

Значит, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, так как $9 : 4 = 2$ и 1 в остатке.

Обратим в смешанное число неправильную дробь $\frac{545}{32}$, указанную выше.

$$545 : 32 = 17 \text{ и } 1 \text{ в остатке, значит, } \frac{545}{32} = 17\frac{1}{32}.$$

**Чтобы обратить неправильную дробь в смешанное число, нужно числитель дроби разделить на знаменатель и найти остаток; частное покажет число целых единиц, а остаток — число долей единицы.**

Так как, обращая неправильную дробь в смешанное число, мы всякий раз выделяем целую часть, то это преобразование принято называть исключением целого числа из неправильной дроби.

Рассмотрим случай, когда неправильная дробь равна ц е л о м у числу. Пусть требуется исключить целое число из неправильной дроби $\frac{36}{12}$. По правилу получаем $36 : 12 = 3$ и 0 в остатке, т. е. числитель разделился на знаменатель без остатка, значит, $\frac{36}{12} = 3$.

Перейдём теперь к о б р а т н о м у преобразованию, т. е. к обращению смешанного числа в неправильную дробь.

Возьмём смешанное число $3\frac{3}{4}$ и обратим его в неправильную дробь. Будем рассуждать так: каждая целая единица содержит 4 четверти, а 3 единицы будут содержать в 3 раза больше четвёртых долей, т. е. $4 \times 3 = 12$ четвёртых долей. Значит, в 3 целых единицах содержится 12 четвертей, да ещё в дробной части смешанного числа имеется 3 четверти, а всего будет 15 четвертей, или $\frac{15}{4}$. Следовательно, $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

П р и м е р. Обратить в неправильную дробь смешанное число $8\frac{4}{9}$:

$$8\frac{4}{9} = \frac{9 \cdot 8 + 4}{9} = \frac{76}{9}.$$

**Чтобы обратить смешанное число в неправильную дробь, нужно знаменатель умножить на целое число, к полученному произведению прибавить числитель и сделать эту сумму числителем искомой дроби, а знаменатель оставить прежний.**

## § 83. Обращение целого числа в неправильную дробь.

Всякое целое число можно выразить в каких угодно долях единицы. Это иногда бывает полезно при вычислениях. Пусть, например, число 5 требуется выразить в шестых долях единицы.

Будем рассуждать следующим образом: так как в одной единице заключается шесть шестых долей, то в 5 единицах этих долей будет не шесть, а в 5 раз больше, т. е. $6\times5 = 30$ шестых долей. Действие принято располагать так:

$$5=\frac{6\cdot5}{6}=\frac{30}{6}.$$

Таким же образом мы можем всякое целое число обратить в неправильную дробь с любым знаменателем. Возьмём число 10 и представим его в виде неправильной дроби с различными знаменателями:

знаменатель 2, тогда $10=\frac{2\cdot10}{2}=\frac{20}{2}$;

знаменатель 3, тогда $10=\frac{3\cdot10}{3}=\frac{30}{3}$;

знаменатель 5, тогда $10=\frac{5\cdot10}{5}=\frac{50}{5}$.

Таким образом, **чтобы выразить целое число в виде неправильной дроби с данным знаменателем, нужно этот знаменатель умножить на данное число, полученное произведение сделать числителем и подписать данный знаменатель.**

Наименьший из возможных знаменателей — единица (1). Поэтому, когда хотят представить целое число в виде дроби, то в качестве знаменателя часто берут единицу $\left(12=\frac{12}{1}\right)$. Эту мысль иногда выражают так: всякое целое число можно рассматривать как дробь со знаменателем, равным единице $\left(2=\frac{2}{1};\ 3=\frac{3}{1};\ 4=\frac{4}{1};\ 5=\frac{5}{1}\text{ и т. д.}\right)$.

## § 84. Изменение величины дроби с изменением её членов.

В этом параграфе мы рассмотрим, как будет изменяться величина дроби при изменении её членов.

1-й вопрос. Что происходит с величиной дроби при увеличении её числителя в несколько раз? Возьмём дробь $\frac{1}{12}$ и будем постепенно увеличивать её числитель в два, в три, в четыре и т. д. раз. Тогда получатся следующие дроби:

$$\frac{1}{12},\ \frac{2}{12},\ \frac{3}{12},\ \frac{4}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{12},\ \frac{8}{12},\ \frac{9}{12},\ \frac{10}{12}.$$

Если мы станем сравнивать эти дроби между собой, то увидим, что они постепенно увеличиваются: вторая дробь в два раза больше первой, потому что в ней вдвое больше долей, третья дробь в три раза больше первой и т. д.

Отсюда можно сделать вывод: **если числитель дроби увеличить в несколько раз, то дробь увеличится во столько же раз.**

2-й вопрос. Что происходит с величиной дроби при уменьшении её числителя в несколько раз? Возьмём дробь $\frac{24}{25}$ и будем постепенно уменьшать её числитель в два раза, в три раза, в четыре раза и т. д. Тогда получатся следующие дроби:

$$\frac{24}{25}, \frac{12}{25}, \frac{8}{25}, \frac{6}{25}, \frac{4}{25}, \frac{3}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}.$$

Посмотрите одну за другой эти дроби слева направо и вы убедитесь, что вторая дробь $\left(\frac{12}{25}\right)$ в два раза меньше первой $\left(\frac{24}{25}\right)$, потому что у неё вдвое меньше долей, т. е. вдвое меньше числитель; четвёртая дробь $\left(\frac{6}{25}\right)$ вчетверо меньше первой и в два раза меньше второй. Значит, **если числитель дроби уменьшить в несколько раз, то дробь уменьшится во столько же раз.**

3-й вопрос. Что произойдёт с величиной дроби при увеличении её знаменателя в несколько раз? На этот вопрос мы можем ответить, взяв какую-нибудь дробь, например $\frac{1}{2}$, и увеличив её знаменатель, не изменяя числителя. Увеличим знаменатель в два раза, в три раза и т. д. и посмотрим, что при этом произойдёт с дробью:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4};\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6};\ \frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{10};\ \frac{1}{2\cdot 10}=\frac{1}{20};\ \frac{1}{2\cdot 50}=\frac{1}{100}.$$

Постепенно увеличивая знаменатель, мы довели его, наконец, до 100. Знаменатель стал довольно велик, но зато сильно уменьшилась величина доли, она стала равна одной сотой. Отсюда ясно, что увеличение знаменателя дроби неизбежно приведёт к уменьшению самой дроби. Значит, **если знаменатель дроби увеличить в несколько раз, то дробь уменьшится во столько же раз.**

4-й вопрос. Что произойдёт с величиной дроби при уменьшении её знаменателя в несколько раз? Мы возьмём те дроби, которые недавно были написаны, и перепишем их с конца; тогда у нас первая дробь будет самой маленькой, а последняя — самой большой, но зато самый большой знаменатель будет у первой, а самый маленький знаменатель будет у последней дроби:

$$\frac{1}{100};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{10};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}.$$

Нетрудно сделать вывод: **если знаменатель дроби уменьшить в несколько раз, то дробь увеличится во столько же раз.**

5-й вопрос. Что произойдёт с дробью при одновременном увеличении или уменьшении числителя и знаменателя в одно и то же число раз?

Возьмём дробь $\frac{1}{2}$ и будем последовательно и одновременно увеличивать её числитель и знаменатель. Рядом с дробью иногда ставят множитель, на который умножаются члены первой дроби:

$$\frac{1}{2};\ \frac{2^{(2)}}{4};\ \frac{3^{(3)}}{6};\ \frac{4^{(4)}}{8};\ \frac{5^{(5)}}{10};\ \frac{6^{(6)}}{12}.$$

Мы написали шесть дробей, они различны по своему внешнему виду, но нетрудно сообразить, что все они равны по величине. В самом деле, сравним хотя бы первую дробь со второй. Первая дробь равна $\frac{1}{2}$; если мы увеличим в два раза её числитель, то дробь увеличится вдвое, но если мы тотчас же увеличим вдвое её знаменатель, то она уменьшится вдвое, т. е., иными словами, она останется без изменения. Значит, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. То же самое рассуждение можно повторить и относительно других дробей.

Вывод: **если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же число** (увеличить в одинаковое число раз), **то величина дроби не изменится.**

Это свойство запишем в общем виде. Обозначим дробь через $\frac{a}{b}$, число, на которое умножается числитель и знаменатель, — буквой $m$; тогда указанное свойство примет вид равенства:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}.$$

Остаётся рассмотреть вопрос об одновременном уменьшении числителя и знаменателя в одинаковое число раз.

Напишем в ряд несколько дробей, где на первом месте будет дробь $\frac{36}{48}$, а на последнем $\frac{3}{4}$:

$$\frac{36}{48} = \frac{18}{24} = \frac{12}{16} = \frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Все они будут равны между собой, что можно обнаружить, сравнив любые две соседние дроби, например, уменьшая числитель первой дроби (36) вдвое, мы уменьшаем дробь в 2 раза, но уменьшая вдвое и её знаменатель (48), мы увеличиваем дробь в 2 раза, т. е. в результате оставляем её без изменения.

Вывод: **если числитель и знаменатель дроби разделить на одно и то же число** (уменьшить в одинаковое число раз), **то величина дроби не изменится**:

$$\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}.$$

Сущность двух последних выводов состоит в том, что **при одновременном увеличении или уменьшении числителя и знаменателя в одинаковое число раз величина дроби не изменится.**

Это замечательное свойство дроби будет иметь большое значение в дальнейшем, поэтому мы будем называть его **основным свойством дроби.**

## § 85. Сокращение дробей.

Возьмём отрезок $AB$ (рис. 16) и разделим его на 20 равных частей, тогда каждая из этих частей будет равна $\frac{1}{20}$. Отрезок же $AC$, который содержит 15 таких частей, будет представлен дробью $\frac{15}{20}$.

Теперь попробуем укрупнить доли, например разделим отрезок не на 20 частей, а на 4 равные части. Новые доли оказались

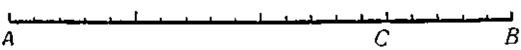


Рис. 16.

крупнее прежних, так как каждая новая доля содержит 5 прежних, что отчётливо видно на чертеже. Теперь подумаем, чему при новом дроблении равен отрезок $AC$, который при первом дроблении был равен $\frac{15}{20}$ отрезка $AB$. Из чертежа видно, что если отрезок $AB$ разделить на 4 части, то отрезок $AC$ будет равен $\frac{3}{4}$ отрезка $AB$. Итак, отрезок $AC$ в зависимости от того, на сколько частей делится отрезок $AB$, может изображаться и дробью $\frac{15}{20}$, и дробью $\frac{3}{4}$. По величине это одна и та же дробь, потому что она измеряет один и тот же отрезок в одних и тех же единицах измерения. Значит, вместо дроби $\frac{15}{20}$ мы можем пользоваться дробью $\frac{3}{4}$, и обратно.

Возникает вопрос, какой дробью удобнее пользоваться? Удобнее пользоваться второй дробью, потому что у неё числитель и знаменатель выражены меньшими числами, чем у первой, и она в этом смысле является более простой.

В процессе рассуждения оказалось, что одна величина (отрезок $AC$) выразилась двумя дробями, различными по внешнему виду, но одинаковыми по величине $\left(\frac{15}{20}, \frac{3}{4}\right)$. Очевидно, таких дробей может быть не две, а бесчисленное множество. Опираясь на основное свойство дроби, мы можем первую из этих дробей привести к такому виду, что числитель и знаменатель будут наименьшими. В самом деле, если числитель и знаменатель дроби $\frac{15}{20}$ разделить на 5, то она будет равна $\frac{3}{4}$, т. е. $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Вот это преобразование (одновременное уменьшение числителя и знаменателя в одинаковое число раз), позволяющее из дроби с бо́льшими числителем и знаменателем получить другую по виду, но равную по величине дробь с меньшими членами, и называется сокращением дробей.

Следовательно, **сокращением дроби называется замена её другой, равной ей дробью с меньшими членами, путём деления числителя и знаменателя на одно и то же число.**

Мы сократили дробь $\frac{15}{20}$ и пришли к дроби $\frac{3}{4}$, которую уже нельзя сократить, потому что её члены 3 и 4 не имеют общего делителя (кроме единицы). Такая дробь называется **несократимой.**

Есть два пути, по которым можно следовать при сокращении дробей. Первый путь состоит в том, что дробь сокращают постепенно, а не сразу, т. е. после первого сокращения получают снова сократимую дробь, которую потом опять сокращают, причём этот процесс может быть длительным, если числитель и знаменатель выражаются большими числами и имеют много общих делителей.

Возьмём дробь $\frac{60}{120}$ и будем сокращать её последовательно, сначала на 2, получим $\frac{60}{120} = \frac{30}{60}$. Новую дробь $\left(\frac{30}{60}\right)$ тоже можно сократить на 2, получим $\frac{30}{60} = \frac{15}{30}$. Члены новой дроби $\left(\frac{15}{30}\right)$ имеют общих делителей, поэтому можно сократить эту дробь на 3, получится $\frac{15}{30} = \frac{5}{10}$. Наконец, последнюю дробь можно сократить на 5, т. е. $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. В этом и состоит последовательное сокращение дробей.

Нетрудно сообразить, что данную дробь $\left(\frac{60}{120}\right)$ можно было бы сократить сразу на 60, и мы получили бы тот же самый результат. Чем является 60 для чисел 60 и 120? Наибольшим общим делителем. Значит, сокращение дроби на н а и б о л ь ш и й общий делитель её членов даёт возможность сразу привести её к виду несократимой дроби, минуя промежуточные деления. Это второй путь сокращения дробей.

### § 86. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю.

Возьмём несколько дробей:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{5}.$$

Если мы станем сравнивать первую дробь со второй $\left(\frac{1}{2}\text{ и }\frac{1}{3}\right)$, то почувствуем некоторое затруднение. Конечно, мы понимаем, что половина больше одной трети, так как в первом случае величина разделена на две равные части, а во втором случае — на три равные части; но какая между ними разница, всё-таки ответить трудно. Другое дело вторая дробь и третья $\left(\frac{1}{3}\text{ и }\frac{2}{3}\right)$, их сравнить легко, так как сразу видно, что вторая дробь меньше третьей на одну треть. Нетрудно понять, что в тех случаях, когда мы сравниваем дроби с одинаковыми знаменателями, затруднений не происходит, в тех же случаях, когда знаменатели у сравниваемых дробей различны, возникают некоторые неудобства. Убедитесь в этом, сравнивая остальные данные дроби.

Поэтому напрашивается вопрос: нельзя ли при сравнении двух дробей добиться того, чтобы знаменатели были одинаковы? Это можно сделать, опираясь на основное свойство дроби, т. е. если мы в несколько раз увеличим знаменатель, то, чтобы не изменилась величина дроби, надо во столько же раз увеличить и её числитель.

Этим путём мы можем дроби с разными знаменателями приводить к общему знаменателю.

Если требуется привести к общему знаменателю какие-нибудь дроби, то сначала нужно найти число, которое делилось бы на знаменатель каждой из данных дробей. Следовательно, первым шагом в процессе приведения дробей к общему знаменателю будет нахождение наименьшего общего кратного для данных знаменателей. После того как наименьшее общее кратное найдено, нужно путём деления его на каждый знаменатель получить для каждой дроби так называемый дополнительный множитель. Это будут числа, указывающие, во сколько раз нужно увеличить числитель и знаменатель каждой дроби, чтобы знаменатели их сравнялись. Рассмотрим примеры.

1. Приведём к общему знаменателю дроби $\frac{7}{30}$ и $\frac{8}{15}$. Найдём для знаменателей 30 и 15 наименьшее общее кратное. В данном случае таковым будет знаменатель первой дроби, т. е. 30.

Это и будет наименьший общий знаменатель для дробей $\frac{7}{30}$ и $\frac{8}{15}$. Теперь найдём дополнительные множители: $30 : 30 = 1$, $30 : 15 = 2$. Значит, для первой дроби дополнительным множителем будет 1, а для второй 2. Первая дробь останется без изменения. Умножая члены второй дроби на дополнительный множитель, приведём и её к знаменателю 30:

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{16}{30}.$$

2. Приведём к общему знаменателю три дроби: $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{60}$ и $\frac{3}{70}$. Найдём для знаменателей 30, 60 и 70 наименьшее общее кратное:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5,$$
$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Наименьшее общее кратное будет $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Это и будет наименьший общий знаменатель данных дробей.

Теперь найдём дополнительные множители: $420 : 30 = 14$; $420 : 60 = 7$; $420 : 70 = 6$. Значит, для первой дроби дополнительным множителем будет 14, для второй 7 и для третьей 6. Умножая члены дробей на соответствующие дополнительные множители, получим дроби с равными знаменателями:

$$\frac{7}{30} = \frac{7 \cdot 14}{30 \cdot 14} = \frac{98}{420}; \quad \frac{11}{60} = \frac{11 \cdot 7}{60 \cdot 7} = \frac{77}{420}; \quad \frac{3}{70} = \frac{3 \cdot 6}{70 \cdot 6} = \frac{18}{420}.$$

3. Приведём к общему знаменателю дроби: $\frac{8}{25}$ и $\frac{5}{12}$. Знаменатели этих дробей (25 и 12) — числа взаимно простые. Поэтому наименьшее общее кратное получится от их перемножения: $25 \times 12 = 300$. Дополнительным множителем для первой дроби будет 12, а для второй 25. Данные дроби примут вид:

$$\frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 12}{25 \cdot 12} = \frac{96}{300}; \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 25}{12 \cdot 25} = \frac{125}{300}.$$

**Чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, нужно сначала найти наименьшее общее кратное всех знаменателей и для каждого знаменателя определить дополнительный множитель, а затем оба члена каждой дроби умножить на соответствующий дополнительный множитель.**

После того как мы научились приводить дроби к общему знаменателю, сравнение дробей по величине уже не будет представлять никаких затруднений. Мы можем теперь сравнивать по величине любые две дроби, приводя их предварительно к общему знаменателю.

---

Глава десятая.

# Действия над дробными числами.

## § 87. Сложение дробей.

Сложение дробей имеет много сходства со сложением целых чисел. Сложение дробей есть действие, состоящее в том, что несколько данных чисел (слагаемых) соединяются в одно число (сумму), содержащее в себе все единицы и доли единиц слагаемых.

Мы последовательно рассмотрим три случая:

1. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Сложение дробей с разными знаменателями.
3. Сложение смешанных чисел.

**1. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.**

Рассмотрим пример: $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$.

Возьмём отрезок $AB$ (рис. 17), примем его за единицу и разделим на 5 равных частей, тогда часть $AC$ этого отрезка будет


Рис. 17.

равна $\frac{1}{5}$ отрезка $AB$, а часть того же отрезка $CD$ будет равна $\frac{2}{5}$ $AB$. Из чертежа видно, что если взять отрезок $AD$, то он будет равен $\frac{3}{5}$ $AB$; но отрезок $AD$ как раз и есть сумма отрезков $AC$ и $CD$. Значит, можно записать:

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

Рассматривая данные слагаемые и полученную сумму, мы видим, что числитель суммы получился от сложения числителей слагаемых, а знаменатель остался без изменения.

Отсюда получаем следующее правило: **чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и оставить тот же знаменатель.**

Рассмотрим пример:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{9}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}.$$

**2. Сложение дробей с разными знаменателями.**

Сложим дроби: $\frac{3}{4}+\frac{3}{8}$. Предварительно их нужно привести к наименьшему общему знаменателю:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6+3}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}.$$

Промежуточное звено $\frac{6}{8}+\frac{3}{8}$ можно было бы и не писать; мы написали его здесь для большей ясности.

Таким образом, **чтобы сложить дроби с разными знаменателями, нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, сложить их числители и подписать общий знаменатель.**

Рассмотрим пример (дополнительные множители будем писать над соответствующими дробями):

$$\frac{3^{\smile 15}}{8}+\frac{7^{\smile 12}}{10}+\frac{5^{\smile 10}}{12}=\frac{45+84+50}{120}=\frac{179}{120}=1\frac{59}{120}.$$

**3. Сложение смешанных чисел.** Сложим числа: $2\frac{3}{8}+3\frac{5}{6}$.

Приведём сначала дробные части наших чисел к общему знаменателю и снова их перепишем:

$$2\frac{3}{8}+3\frac{5}{6}=2\frac{9}{24}+3\frac{20}{24}.$$

Теперь сложим последовательно целые и дробные части:

$$2\frac{9}{24}+3\frac{20}{24}=5\frac{9+20}{24}=5\frac{29}{24}=6\frac{5}{24}.$$

## § 88. Вычитание дробей.

Вычитание дробей определяется так же, как и вычитание целых чисел. Это есть действие, с помощью которого по данной сумме двух слагаемых и одному из них отыскивается другое слагаемое.

Рассмотрим последовательно три случая:

1. Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Вычитание дробей с разными знаменателями.
3. Вычитание смешанных чисел.

**1. Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.**

Рассмотрим пример:

$$\frac{13}{15}-\frac{4}{15}.$$

Возьмём отрезок $AB$ (рис. 18), примем его за единицу и разделим на 15 равных частей; тогда часть $AC$ этого отрезка будет представлять собой $\frac{1}{15}$ от $AB$, а часть $AD$ того же отрезка будет соответствовать $\frac{13}{15}$ $AB$. Отложим ещё отрезок $ED$, равный $\frac{4}{15}$ $AB$. Нам требуется вычесть из $\frac{13}{15}$ дробь $\frac{4}{15}$. На чертеже это значит,

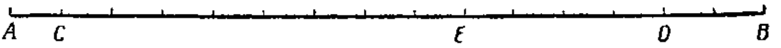

Рис. 18.

что от отрезка $AD$ нужно отнять отрезок $ED$. В результате останется отрезок $AE$, который составляет $\frac{9}{15}$ отрезка $AB$. Значит, мы можем написать:

$$\frac{13}{15}-\frac{4}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

Сделанный нами пример показывает, что числитель разности получился от вычитания числителей, а знаменатель остался тот же самый.

Следовательно, **чтобы сделать вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, нужно вычесть числитель вычитаемого из числителя уменьшаемого и оставить прежний знаменатель.**

**2. Вычитание дробей с разными знаменателями.**

Пример. $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$.

Предварительно приведём эти дроби к наименьшему общему знаменателю:

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{6-5}{8}=\frac{1}{8}.$$

Промежуточное звено $\frac{6}{8}-\frac{5}{8}$ написано здесь для большей ясности, но его можно в дальнейшем пропускать.

Таким образом, **чтобы вычесть дробь из дроби, нужно предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю, затем из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого и под их разностью подписать общий знаменатель.**

Рассмотрим пример:

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{8}=\frac{22-15}{24}=\frac{7}{24}.$$

**3. Вычитание смешанных чисел.**

Пример. $10\frac{3}{4}-7\frac{2}{3}$.

Приведём дробные части уменьшаемого и вычитаемого к наименьшему общему знаменателю:

$$10\frac{3}{4}-7\frac{2}{3}=10\frac{9}{12}-7\frac{8}{12}=3\frac{1}{12}.$$

Мы вычли целое из целого и дробь из дроби. Но бывают случаи, когда дробная часть вычитаемого больше дробной части уменьшаемого. В таких случаях нужно взять одну единицу из целой части уменьшаемого, раздробить её в те доли, в каких выражена дробная часть, и прибавить к дробной части уменьшаемого. А затем вычитание будет выполняться так же, как и в предыдущем примере:

$$9\frac{2}{5} - 4\frac{7}{10} = 9\frac{4}{10} - 4\frac{7}{10} = 8\frac{14}{10} - 4\frac{7}{10} = 4\frac{7}{10}.$$

## § 89. Умножение дробей.

При изучении умножения дробей мы будем рассматривать следующие вопросы:

1. Умножение дроби на целое число.
2. Нахождение дроби данного числа.
3. Умножение целого числа на дробь.
4. Умножение дроби на дробь.
5. Умножение смешанных чисел.
6. Понятие о проценте.
7. Нахождение процентов данного числа.

Рассмотрим их последовательно.

**1. Умножение дроби на целое число.** Умножение дроби на целое число имеет тот же смысл, что и умножение целого числа на целое. Умножить дробь (множимое) на целое число (множитель) — значит составить сумму одинаковых слагаемых, в которой каждое слагаемое равно множимому, а число слагаемых равно множителю.

Значит, если нужно $\frac{1}{9}$ умножить на 7, то это можно выполнить так:

$$\frac{1}{9} \cdot 7 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Мы легко получили результат, так как действие свелось к сложению дробей с одинаковыми знаменателями. Следовательно,

$$\frac{1}{9} \cdot 7 = \frac{7}{9}.$$

Рассмотрение этого действия показывает, что умножение дроби на целое число равносильно увеличению этой дроби во столько раз, сколько единиц содержится в целом числе. А так как увеличение дроби достигается или путём увеличения её числителя

$\left(\frac{3}{8} \cdot 2 = \frac{3 \cdot 2}{8}\right)$, или путём уменьшения её знаменателя $\left(\frac{3}{8} \cdot 2 = \right.$ $\left.= \frac{3}{8:2} = \frac{3}{4}\right)$, то мы можем либо умножить числитель на целое, либо разделить на него знаменатель, если такое деление возможно.

Отсюда получаем правило:

**Чтобы умножить дробь на целое число, нужно умножить на это целое число числитель и оставить тот же знаменатель или, если возможно, разделить на это число знаменатель, оставив без изменения числитель.**

При умножении возможны сокращения, например:

$$\frac{3}{10} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{10} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}; \qquad \frac{5}{8} \cdot 16 = \frac{5 \cdot 16}{8} = 10.$$

**2. Нахождение дроби данного числа.** Существует множество задач, при решении которых приходится находить, или вычислять, часть данного числа. Отличие этих задач от прочих состоит в том, что в них даётся число каких-нибудь предметов или единиц измерения и требуется найти часть этого числа, которая здесь же указывается определённой дробью. Для облегчения понимания мы сначала приведём примеры таких задач, а потом познакомим со способом их решения.

Задача 1. У меня было 60 руб.; $\frac{1}{3}$ этих денег я израсходовал на покупку книг. Сколько стоили книги?

Задача 2. Поезд должен пройти расстояние между городами *A* и *B*, равное 300 *км*. Он уже прошёл $\frac{2}{3}$ этого расстояния. Сколько это составляет километров?

Задача 3. В селе 400 домов, из них $\frac{3}{4}$ кирпичных, остальные деревянные. Сколько всего кирпичных домов?

Вот некоторые из тех многочисленных задач на нахождение части от данного числа, с которыми нам приходится встречаться. Их обычно называют задачами на нахождение дроби данного числа.

Решение задачи 1. Из 60 руб. я израсходовал на книги $\frac{1}{3}$. Значит, для нахождения стоимости книг нужно число 60 разделить на 3:

$$60 : 3 = 20.$$

Решение задачи 2. Смысл задачи заключается в том, что нужно найти $\frac{2}{3}$ от 300 *км*. Вычислим сначала $\frac{1}{3}$ от 300; это достигается при помощи деления 300 *км* на 3:

$$300 : 3 = 100 \text{ (это } \tfrac{1}{3} \text{ от 300).}$$

Для нахождения двух третей от 300 нужно полученное частное увеличить вдвое, т. е. умножить на 2:

$$100 \times 2 = 200 \text{ (это } \frac{2}{3} \text{ от } 300).$$

Решение задачи 3. Здесь нужно определить число кирпичных домов, которые составляют $\frac{3}{4}$ от 400. Найдём сначала $\frac{1}{4}$ от 400.

$$400 : 4 = 100 \text{ (это } \frac{1}{4} \text{ от } 400).$$

Для вычисления трёх четвертей от 400 полученное частное нужно увеличить втрое, т. е. умножить на 3:

$$100 \times 3 = 300 \text{ (это } \frac{3}{4} \text{ от } 400).$$

На основании решения этих задач мы можем вывести следующее правило:

**Чтобы найти величину дроби от данного числа, нужно разделить это число на знаменатель дроби и полученное частное умножить на её числитель.**

3. **Умножение целого числа на дробь.** Ранее (§ 26) было установлено, что умножение целых чисел нужно понимать, как сложение одинаковых слагаемых ($5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$). В настоящем параграфе (пункт 1) было установлено, что умножить дробь на целое число — это значит найти сумму одинаковых слагаемых, равных этой дроби.

В обоих случаях умножение состояло в нахождении суммы одинаковых слагаемых.

Теперь мы переходим к умножению целого числа на дробь. Здесь мы встретимся с таким, например, умножением: $9 \cdot \frac{2}{3}$. Совершенно очевидно, что прежнее определение умножения не подходит к данному случаю. Это видно из того, что мы не можем такое умножение заменить сложением равных между собой чисел.

В силу этого нам придётся дать новое определение умножения, т. е., иными словами, ответить на вопрос, что следует разуметь под умножением на дробь, как нужно понимать это действие.

Смысл умножения целого числа на дробь выясняется из следующего определения: **умножить целое число (множимое) на дробь (множитель) — значит найти эту дробь множимого.**

Именно, умножить 9 на $\frac{2}{3}$ — значит найти $\frac{2}{3}$ от девяти единиц. В предыдущем пункте решались такие задачи; поэтому легко сообразить, что у нас в результате получится 6.

Но теперь возникает интересный и важный вопрос: почему такие на первый взгляд различные действия, как нахождение суммы равных чисел и нахождение дроби числа, в арифметике называются одним и тем же словом «умножение»?

Происходит это потому, что прежнее действие (повторение числа слагаемым несколько раз) и новое действие (нахождение дроби числа) дают ответ на однородные вопросы. Значит, мы исходим здесь из тех соображений, что однородные вопросы или задачи решаются одним и тем же действием.

Чтобы это понять, рассмотрим следующую задачу: «1 *м* сукна стоит 50 руб. Сколько будет стоить 4 *м* такого сукна?»

Эта задача решается умножением числа рублей (50) на число метров (4), т. е. $50 \times 4 = 200$ (руб.).

Возьмём такую же задачу, но в ней количество сукна будет выражено дробным числом: «1 *м* сукна стоит 50 руб. Сколько будет стоить $\frac{3}{4}$ *м* такого сукна?»

Эту задачу тоже нужно решать умножением числа рублей (50) на число метров $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Можно и ещё несколько раз, не меняя смысла задачи, изменить в ней числа, например взять $\frac{9}{10}$ *м* или $2\frac{3}{10}$ *м* и т. д.

Так как эти задачи имеют одно и то же содержание и отличаются только числами, то мы называем действия, применяемые при их решении, одним и тем же словом — умножение.

Как выполняется умножение целого числа на дробь?

Возьмём числа, встретившиеся в последней задаче:

$$50 \cdot \frac{3}{4} = ?$$

Согласно определению мы должны найти $\frac{3}{4}$ от 50. Найдём сначала $\frac{1}{4}$ от 50, а затем $\frac{3}{4}$.

$\frac{1}{4}$ числа 50 составляет $\frac{50}{4}$;

$\frac{3}{4}$ числа 50 составляют $\frac{50 \cdot 3}{4}$.

Следовательно,

$$50 \cdot \frac{3}{4} = \frac{50 \cdot 3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим ещё один пример: $12 \cdot \frac{5}{8} = ?$

$\frac{1}{8}$ числа 12 составляет $\frac{12}{8}$,

$\frac{5}{8}$ числа 12 составляют $\frac{12 \cdot 5}{8}$.

Следовательно,

$$12 \cdot \frac{5}{8} = \frac{12 \cdot 5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем правило:

**Чтобы умножить целое число на дробь, надо умножить целое число на числитель дроби и это произведение сделать числителем, а знаменателем подписать знаменатель данной дроби.**

Запишем это правило с помощью букв:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}.$$

Чтобы это правило стало совершенно понятным, следует помнить, что дробь можно рассматривать как частное. Поэтому найденное правило полезно сравнить с правилом умножения числа на частное, которое было изложено в § 38. Обратите внимание на то, что там была получена такая же формула.

Необходимо помнить, что прежде чем выполнять умножение, следует делать (если возможно) с о к р а щ е н и я, например:

$$10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{10 \cdot 3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

**4. Умножение дроби на дробь.** Умножение дроби на дробь имеет тот же смысл, что и умножение целого числа на дробь, т. е. при умножении дроби на дробь нужно от первой дроби (множимого) найти дробь, стоящую во множителе.

Именно, умножить $\frac{3}{4}$ на $\frac{1}{2}$ (половину) — это значит найти половину от $\frac{3}{4}$.

Как выполняется умножение дроби на дробь?

Возьмём пример: $\frac{3}{4}$ умножить на $\frac{5}{7}$. Это значит, что нужно найти $\frac{5}{7}$ от $\frac{3}{4}$. Найдём сначала $\frac{1}{7}$ от $\frac{3}{4}$, а потом $\frac{5}{7}$.

$$\frac{1}{7} \text{ числа } \frac{3}{4} \text{ выразится так: } \frac{3}{4 \cdot 7}.$$

$$\frac{5}{7} \text{ числа } \frac{3}{4} \text{ выразятся так: } \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}.$$

Таким образом,

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

Ещё пример: $\frac{5}{8}$ умножить на $\frac{4}{9}$.

$$\frac{1}{9} \text{ числа } \frac{5}{8} \text{ составляет } \frac{5}{8 \cdot 9};$$

$$\frac{4}{9} \text{ числа } \frac{5}{8} \text{ составляют } \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 9}.$$

Таким образом, $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{5}{18}$.

Из рассмотрения этих примеров можно вывести следующее правило:

**Чтобы умножить дробь на дробь, нужно умножить числитель на числитель, а знаменатель — на знаменатель и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем произведения.**

Это правило в общем виде можно записать так:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

При умножении необходимо делать (если возможно) сокращения. Рассмотрим примеры:

$$\text{а) } \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14} = \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 14} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8},$$

$$\text{б) } \frac{5}{18} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5 \cdot 3}{18 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{1}{12}.$$

**5. Умножение смешанных чисел.** Так как смешанные числа легко могут быть заменены неправильными дробями, то этим обстоятельством обычно пользуются при умножении смешанных чисел. Это значит, что в тех случаях, когда множимое, или множитель, или оба сомножителя выражены смешанными числами, то их заменяют неправильными дробями. Перемножим, например, смешанные числа: $2\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{5}$. Обратим каждое из них в неправильную дробь и потом будем перемножать полученные дроби по правилу умножения дроби на дробь:

$$2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{16}{5} = \frac{5 \cdot 16}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 8}{1 \cdot 1} = 8.$$

Правило. **Чтобы перемножить смешанные числа, нужно предварительно обратить их в неправильные дроби и потом перемножить по правилу умножения дроби на дробь.**

Примечание. Если один из сомножителей — целое число, то умножение может быть выполнено на основании распределительного закона так:

$$4\frac{2}{5} \cdot 3 = \left(4 + \frac{2}{5}\right) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + \frac{2}{5} \cdot 3 = 12 + \frac{6}{5} = 13\frac{1}{5}.$$

**6. Понятие о проценте.** При решении задач и при выполнении различных практических расчётов мы пользуемся всевозможными дробями. Но нужно иметь в виду, что многие величины допускают не любые, а естественные для них подразделения. Например, можно взять одну сотую $\left(\frac{1}{100}\right)$ рубля, это будет копейка, две сотых — это 2 коп., три сотых — 3 коп. Можно взять $\frac{1}{10}$ рубля, это будет 10 коп., или гривенник. Можно взять четверть рубля, т. е. 25 коп., половину рубля, т. е. 50 коп. (полтинник). Но практически не берут, например, $\frac{2}{7}$ рубля потому, что рубль на седьмые доли не делится.

Единица измерения веса, т. е. килограмм, допускает прежде всего десятичные подразделения, например $\frac{1}{10}$ *кг*, или 100 *г*. А такие доли килограмма, как $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, неупотребительны.

Вообще наши (метрические) меры являются десятичными и допускают десятичные подразделения.

Однако надо заметить, что крайне полезно и удобно в самых разнообразных случаях пользоваться одинаковым (однообразным) способом подразделения величин. Многолетний опыт показал, что таким хорошо оправдавшим себя делением является «сотенное» деление. Рассмотрим несколько примеров, относящихся к самым разнообразным областям человеческой практики.

1. Цена на книги понизилась на $\frac{12}{100}$ прежней цены.

Пример. Прежняя цена книги 10 руб. Она понизилась на 1 рубль. 20 коп.

2. Сберегательные кассы выплачивают в течение года вкладчикам $\frac{2}{100}$ суммы, которая положена на сбережение.

Пример. В кассу положено 500 руб., доход с этой суммы за год составляет 10 руб.

3. Число выпускников одной школы составило $\frac{5}{100}$ от общего числа учащихся.

Пример. В школе обучалось всего 1 200 учащихся, из них окончили школу 60 человек.

**Сотая часть числа называется процентом**[1]. Например, вместо того чтобы говорить, что завод за истекший месяц дал брака $\frac{1}{100}$ от всей выработанной им продукции, мы будем говорить так:

---

[1] Слово «процент» заимствовано из латинского языка и его корень «цент» означает сто. Вместе с предлогом (pro centum) это слово обозначает «за сотню». Смысл такого выражения вытекает из того обстоятельства, что первоначально в древнем Риме процентами назывались деньги, которые платил должник заимодавцу «за каждую сотню». Слово «цент» слышится в таких всем знакомых словах: центнер (сто килограммов), центиметр (говорится сантиметр).

завод за истекший месяц дал один процент брака. Вместо того чтобы говорить: завод выработал продукции на $\frac{4}{100}$ больше установленного плана, мы будем говорить: завод перевыполнил план на 4 процента.

Изложенные выше примеры можно высказать иначе:

1. Цена на книги понизилась на 12 процентов прежней цены.
2. Сберегательные кассы выплачивают вкладчикам за год 2 процента с суммы, положенной на сбережение.
3. Число выпускников одной школы составляло 5 процентов числа всех учащихся школы.

Для сокращения письма принято вместо слова «процент» писать значок %.

Однако нужно помнить, что в вычислениях значок % обычно не пишется, он может быть записан в условии задачи и в окончательном результате. При выполнении же вычислений нужно писать дробь со знаменателем 100 вместо целого числа с этим значком.

Нужно уметь заменять целое число с указанным значком дробью с знаменателем 100:

$$2\% = \frac{2}{100}; \qquad 25\% = \frac{25}{100}; \qquad 4\% = \frac{4}{100}; \qquad 40\% = \frac{40}{100}.$$

Обратно, нужно привыкнуть вместо дроби с знаменателем 100 писать целое число с указанным значком:

$$\frac{1}{100} = 1\%; \qquad \frac{19}{100} = 19\%; \qquad \frac{3}{100} = 3\%; \qquad \frac{27}{100} = 27\%.$$

**7. Нахождение процентов данного числа.** З а д а ч а 1. Школа получила 200 *куб. м* дров, причём берёзовые дрова составляли 30%. Сколько было берёзовых дров?

Смысл этой задачи состоит в том, что берёзовые дрова составляли лишь часть тех дров, которые были доставлены в школу, и эта часть выражается дробью $\frac{30}{100}$. Значит, перед нами задача на нахождение дроби от числа. Для её решения мы должны 200 умножить на $\frac{30}{100}$ (задачи на нахождение дроби числа решаются умножением числа на дробь. См. стр. 106).

$$200 \cdot \frac{30}{100} = \frac{200 \cdot 30}{100} = 60 \text{ (куб. м)}.$$

Значит, 30% от 200 равняются 60.

Дробь $\frac{30}{100}$, встречавшаяся в этой задаче, допускает сокращение на 10. Можно было бы с самого начала выполнить это сокращение; решение задачи от этого не изменилось бы.

З а д а ч а 2. В лагере было 300 детей различных возрастов. Дети 11 лет составляли 21%, дети 12 лет составляли 61% и, наконец, 13-летних детей было 18%. Сколько было детей каждого возраста в лагере?

В этой задаче нужно выполнить три вычисления, т. е. последовательно найти число детей 11 лет, потом 12 лет и, наконец, 13 лет.

Значит, здесь нужно будет три раза отыскать дробь от числа. Сделаем это:

1) Сколько было детей 11-летнего возраста?

$$300 \cdot \frac{21}{100} = \frac{300 \cdot 21}{100} = 63.$$

2) Сколько было детей 12-летнего возраста?

$$300 \cdot \frac{61}{100} = \frac{300 \cdot 61}{100} = 183.$$

3) Сколько было детей 13-летнего возраста?

$$300 \cdot \frac{18}{100} = \frac{300 \cdot 18}{100} = 54.$$

После решения задачи полезно сложить найденные числа; сумма их должна составить 300:

$$63 + 183 + 54 = 300.$$

Следует также обратить внимание на то, что сумма процентов, данных в условии задачи, составляет 100:

$$21\% + 61\% + 18\% = 100\%.$$

Это говорит о том, что общее число детей, находившихся в лагере, было принято за 100%.

З а д а ч а 3. Рабочий получил за месяц 1 200 руб. Из них 65% он израсходовал на питание, 6% — на квартиру и отопление, 4% — на газ, электричество и радио, 10% — на культурные нужды и 15% — сберёг. Сколько денег израсходовано на указанные в задаче нужды?

Для решения этой задачи нужно 5 раз найти дробь от числа 1 200. Сделаем это.

1) Сколько денег израсходовано на питание? В задаче сказано, что этот расход составляет 65% от всего заработка, т. е. $\frac{65}{100}$ от числа 1 200. Сделаем вычисление:

$$1\,200 \cdot \frac{65}{100} = \frac{1200 \cdot 65}{100} = 780 \text{ (руб.)}.$$

2) Сколько денег уплачено за квартиру с отоплением? Рассуждая подобно предыдущему, мы придём к следующему вычислению:

$$1\,200 \cdot \frac{6}{100} = \frac{1200 \cdot 6}{100} = 72 \text{ (руб.)}.$$

3) Сколько денег уплатили за газ, электричество и радио?

$$1\,200 \cdot \frac{4}{100} = \frac{1200 \cdot 4}{100} = 48 \text{ (руб.)}.$$

4) Сколько денег израсходовано на культурные нужды?

$$1\,200 \cdot \frac{10}{100} = \frac{1200 \cdot 10}{100} = 120 \text{ (руб.)}.$$

5) Сколько денег рабочий сберёг?

$$1\,200 \cdot \frac{15}{100} = \frac{1200 \cdot 15}{100} = 180 \text{ (руб.)}.$$

Для проверки полезно сложить числа, найденные в этих 5 вопросах. Сумма должна составить 1 200 руб. Весь заработок принят за 100%, что легко проверить, сложив числа процентов, данные в условии задачи.

Мы решили три задачи. Несмотря на то, что в этих задачах речь шла о различных вещах (доставка дров для школы, число детей различных возрастов, расходы рабочего), они решались одним и тем же способом. Это произошло потому, что во всех задачах нужно было найти несколько процентов от данных чисел.

## § 90. Деление дробей.

При изучении деления дробей мы будем рассматривать следующие вопросы:

1. Деление целого числа на целое.
2. Деление дроби на целое число.
3. Деление целого числа на дробь.
4. Деление дроби на дробь.
5. Деление смешанных чисел.
6. Нахождение числа по данной его дроби.
7. Нахождение числа по его процентам.

Рассмотрим их последовательно.

**1. Деление целого числа на целое.** Как было указано в отделе целых чисел, делением называется действие, состоящее в том, что по данному произведению двух сомножителей (делимому) и одному из этих сомножителей (делителю) отыскивается другой сомножитель.

Деление целого числа на целое мы рассматривали в отделе целых чисел. Мы встретили там два случая деления: деление без остатка, или «нацело» (150 : 10 = 15), и деление с остатком (100 : 9 = 11 и 1 в остатке). Мы можем, следовательно, сказать, что в области целых чисел точное деление не всегда возможно, потому что делимое не всегда является произведением делителя на целое число. После введения умножения на дробь мы можем всякий случай деления целых чисел считать возможным (исключается только деление на нуль).

Например, разделить 7 на 12 — это значит найти такое число, произведение которого на 12 было бы равно 7. Таким числом является дробь $\frac{7}{12}$, потому что $\frac{7}{12} \cdot 12 = 7$. Ещё пример: $14 : 25 = \frac{14}{25}$, потому что $\frac{14}{25} \cdot 25 = 14$.

Таким образом, **чтобы разделить целое число на целое, нужно составить дробь, числитель которой равен делимому, а знаменатель — делителю.**

**2. Деление дроби на целое число.** Разделить дробь $\frac{6}{7}$ на 3. Согласно данному выше определению деления мы имеем здесь произведение $\left(\frac{6}{7}\right)$ и один из сомножителей (3); требуется найти такой второй сомножитель, который от умножения на 3 дал бы данное произведение $\frac{6}{7}$. Очевидно, он должен быть втрое меньше этого произведения. Значит, поставленная перед нами задача состояла в том, чтобы дробь $\frac{6}{7}$ уменьшить в 3 раза.

Мы уже знаем, что уменьшение дроби можно выполнить или путём уменьшения её числителя, или путём увеличения её знаменателя. Поэтому можно написать:

$$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6 : 3}{7} = \frac{2}{7}.$$

В данном случае числитель 6 делится на 3, поэтому следует уменьшить в 3 раза числитель.

Возьмём другой пример: $\frac{5}{8}$ разделить на 2. Здесь числитель 5 не делится нацело на 2, значит, на это число придётся умножить знаменатель:

$$\frac{5}{8} : 2 = \frac{5}{8 \cdot 2} = \frac{5}{16}.$$

На основании этого можно высказать правило: **чтобы разделить дробь на целое число, нужно разделить на это целое число числитель дроби** (если это возможно), **оставив тот же знамена-**

**тель, или умножить на это число знаменатель дроби, оставив тот же числитель.**

При делении возможны сокращения, например:

а) $\frac{8}{15} : 6 = \frac{8}{15 \cdot 6} = \frac{4}{15 \cdot 3} = \frac{4}{45}$; б) $\frac{10}{11} : 15 = \frac{10}{11 \cdot 15} = \frac{2}{11 \cdot 3} = \frac{2}{33}$.

**3. Деление целого числа на дробь.** Пусть требуется разделить 5 на $\frac{1}{2}$, т. е. найти такое число, которое после умножения на $\frac{1}{2}$ даст произведение 5. Очевидно, это число должно быть больше 5, так как $\frac{1}{2}$ есть правильная дробь, а при умножении числа на правильную дробь произведение должно быть меньше множимого. Чтобы это было понятнее, запишем наши действия следующим образом: $5 : \frac{1}{2} = x$, значит, $x \cdot \frac{1}{2} = 5$.

Мы должны найти такое число $x$, которое, будучи умножено на $\frac{1}{2}$, дало бы 5. Так как умножить некоторое число на $\frac{1}{2}$ — это значит найти $\frac{1}{2}$ этого числа, то, следовательно, $\frac{1}{2}$ неизвестного числа $x$ равна 5, а всё число $x$ вдвое больше, т. е. $5 \cdot 2 = 10$.

Таким образом, $5 : \frac{1}{2} = 5 \cdot 2 = 10$.

Проверим: $10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10 \cdot 1}{2} = 5$.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть требуется разделить 6 на $\frac{2}{3}$. Попробуем сначала найти искомый результат с помощью


Рис. 19.

чертежа (рис. 19). Изобразим отрезок $AB$, равный 6 каким-нибудь единицам, и разделим каждую единицу на 3 равные части. В каждой единице три трети $\left(\frac{3}{3}\right)$, во всём отрезке $AB$ в 6 раз больше, т. е. $\frac{18}{3}$. Соединим при помощи маленьких скобочек 18 полученных отрезков по 2; получится всего 9 отрезков. Значит дробь $\frac{2}{3}$ содержится в 6 единицах 9 раз, или, иными словами, дробь $\frac{2}{3}$ в 9 раз меньше 6 целых единиц. Следовательно,

$$6 : \frac{2}{3} = 9.$$

Каким образом получить этот результат без чертежа при помощи одних только вычислений? Будем рассуждать так: требуется 6 разделить на $\frac{2}{3}$, т. е. требуется ответить на вопрос, сколько раз $\frac{2}{3}$ содержатся в 6. Узнаем сначала: сколько раз $\frac{1}{3}$ содержится в 6? В целой единице — 3 трети, а в 6 единицах — в 6 раз больше, т. е. 18 третей; для нахождения этого числа мы должны 6 умножить на 3. Значит, $\frac{1}{3}$ содержится в 6 единицах 18 раз, а $\frac{2}{3}$ содержатся в 6 не 18 раз, а вдвое меньше раз, т. е. $18 : 2 = 9$. Следовательно, при делении 6 на $\frac{2}{3}$ мы выполнили следующие действия:

$$6 : \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Отсюда получаем правило деления целого числа на дробь. **Чтобы разделить целое число на дробь, надо это целое число умножить на знаменатель данной дроби и, сделав это произведение числителем, разделить его на числитель данной дроби.**

Запишем правило при помощи букв:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Чтобы это правило стало совершенно понятным, следует помнить, что дробь можно рассматривать как частное. Поэтому найденное правило полезно сравнить с правилом деления числа на частное, которое было изложено в § 38. Обратите внимание на то, что там была получена такая же формула.

При делении возможны сокращения, например:

$$12 : \frac{9}{10} = \frac{12 \cdot 10}{9} = \frac{4 \cdot 10}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

**4. Деление дроби на дробь.** Пусть требуется разделить $\frac{3}{4}$ на $\frac{3}{8}$. Что будет обозначать число, которое получится в результате деления? Оно будет давать ответ на вопрос, сколько раз дробь $\frac{3}{8}$ содержится в дроби $\frac{3}{4}$. Чтобы разобраться в этом вопросе, сделаем чертёж (рис. 20).

Возьмём отрезок $AB$, примем его за единицу, разделим на 4 равные части и отметим 3 такие части. Отрезок $AC$ будет равен $\frac{3}{4}$ отрезка $AB$. Разделим теперь каждый из четырёх первоначальных отрезков пополам, тогда отрезок $AB$ разделится на 8 равных частей и каждая такая часть будет равна $\frac{1}{8}$ отрезка $AB$. Соединим дугами по 3 таких отрезка, тогда каждый из отрезков $AD$ и $DC$ будет равен $\frac{3}{8}$ отрезка $AB$. Чертёж показывает, что от-

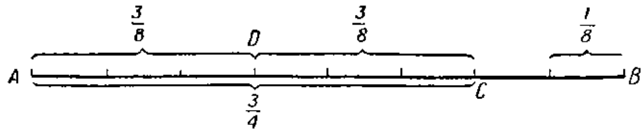


Рис. 20.

резок, равный $\frac{3}{8}$, содержится в отрезке, равном $\frac{3}{4}$, ровно 2 раза; значит, результат деления можно записать так:

$$\frac{3}{4}:\frac{3}{8}=2.$$

Рассмотрим ещё один пример. Пусть требуется разделить $\frac{15}{16}$ на $\frac{3}{32}$.

Мы можем рассуждать так: нужно найти такое число, которое после умножения на $\frac{3}{32}$ даст произведение, равное $\frac{15}{16}$. Запишем вычисления так:

$$\frac{15}{16}:\frac{3}{32}=x;$$

отсюда

$$\frac{3}{32}\cdot x=\frac{15}{16},$$

$\frac{3}{32}$ неизвестного числа $x$ составляют $\frac{15}{16}$,

$\frac{1}{32}$ неизвестного числа $x$ составляет $\frac{15}{16\cdot 3}$,

$\frac{32}{32}$ числа $x$ составляют $\frac{15\cdot 32}{16\cdot 3}$.

Следовательно,

$$\frac{15}{16}:\frac{3}{32}=\frac{15\cdot 32}{16\cdot 3}=10.$$

Таким образом, **чтобы разделить дробь на дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй, а знаменатель первой дроби умножить на числитель второй и первое произведение сделать числителем, а второе — знаменателем.**

Запишем правило с помощью букв:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

При делении возможны сокращения, например:

$$\frac{2}{3}:\frac{8}{15}=\frac{2\cdot 15}{3\cdot 8}=\frac{1\cdot 5}{1\cdot 4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$$

**5. Деление смешанных чисел.** При делении смешанных чисел их нужно предварительно обращать в неправильные дроби, а затем производить деление полученных дробей по правилам деления дробных чисел. Рассмотрим пример:

$$7\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}.$$

Обратим смешанные числа в неправильные дроби:

$$7\frac{1}{2}=\frac{15}{2},\quad 3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}.$$

Теперь разделим:

$$\frac{15}{2}:\frac{10}{3}=\frac{15\cdot 3}{2\cdot 10}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}.$$

Таким образом, **чтобы разделить смешанные числа, нужно обратить их в неправильные дроби и затем разделить по правилу деления дробей.**

**6. Нахождение числа по данной его дроби.** Среди различных задач на дроби иногда встречаются такие, в которых даётся величина какой-нибудь дроби неизвестного числа и требуется найти это число. Этого типа задачи будут о б р а т н ы м и по отношению к задачам на нахождение дроби данного числа; там давалось число и требовалось найти некоторую дробь от этого числа, здесь даётся дробь от числа и требуется найти само это число. Эта мысль станет ещё яснее, если мы обратимся к решению такого типа задач.

З а д а ч а 1. В первый день стекольщики остеклили 50 окон, что составляет $\frac{1}{3}$ всех окон построенного дома. Сколько всего окон в этом доме?

Р е ш е н и е. В задаче сказано, что остеклённые 50 окон составляют $\frac{1}{3}$ всех окон дома, значит, всего окон в 3 раза больше, т. е.

$$50\cdot 3=150.$$

В доме было 150 окон.

З а д а ч а 2. Магазин продал 1 500 *кг* муки, что составляет $\frac{3}{8}$ всего запаса муки, имевшегося в магазине. Каков был первоначальный запас муки в магазине?

Р е ш е н и е. Из условия задачи видно, что проданные 1 500 *кг* муки составляют $\frac{3}{8}$ всего запаса; значит, $\frac{1}{8}$ этого запаса будет в 3 раза меньше, т. е. для её вычисления нужно 1 500 уменьшить в 3 раза:

$$1\,500 : 3 = 500 \left(\text{это } \frac{1}{8} \text{ запаса}\right).$$

Очевидно, весь запас будет в 8 раз больше. Следовательно,

$$500 \cdot 8 = 4\,000 \text{ (кг)}.$$

Первоначальный запас муки в магазине был равен 4 000 *кг*.

Из рассмотрения этой задачи можно вывести следующее правило.

**Чтобы найти число по данной величине его дроби, достаточно разделить эту величину на числитель дроби и результат умножить на знаменатель дроби.**

Мы решили две задачи на нахождение числа по данной его дроби. Такие задачи, как это особенно хорошо видно из последней, решаются двумя действиями: делением (когда находят одну часть) и умножением (когда находят всё число).

Однако после того как мы изучили деление дробей, указанные выше задачи можно решать одним действием, а именно: делением на дробь.

Например, последняя задача может быть решена одним действием так:

$$1\,500 : \frac{3}{8} = \frac{1\,500 \cdot 8}{3} = 4\,000 \text{ (кг)}.$$

В дальнейшем задачи на нахождение числа по его дроби мы будем решать одним действием — делением.

**7. Нахождение числа по его процентам.** В этих задачах нужно будет найти число, зная несколько процентов этого числа.

З а д а ч а 1. В начале текущего года я получил в сберегательной кассе 60 руб. дохода с суммы, положенной мной на сбережение год назад. Сколько денег я положил в сберегательную кассу? (Кассы дают вкладчикам 2% дохода в год.)

Смысл задачи состоит в том, что некоторая сумма денег была положена мной в сберегательную кассу и пролежала там год. По прошествии года я получил с неё 60 руб. дохода, что составляет $\frac{2}{100}$ тех денег, которые я положил. Сколько же денег я положил?

Следовательно, зная часть этих денег, выраженную двумя способами (в рублях и дробью), мы должны найти всю, пока неизвестную, сумму. Это обыкновенная задача на нахождение числа по данной его дроби. Решаются такие задачи делением:

$$60 : \frac{2}{100} = \frac{60 \cdot 100}{2} = 3\,000 \text{ (руб.)}.$$

Значит, в сберегательную кассу было положено 3000 руб.

З а д а ч а 2. Рыболовы за две недели выполнили месячный план на 64%, заготовив 512 *т* рыбы. Какой у них был план?

Из условия задачи известно, что рыболовы выполнили часть плана. Эта часть равна 512 *т*, что составляет 64% плана. Сколько тонн рыбы нужно заготовить по плану, нам неизвестно. В нахождении этого числа и будет состоять решение задачи.

Такие задачи решаются делением:

$$512 : \frac{64}{100} = \frac{512 \cdot 100}{64} = 800\,(т).$$

Значит, по плану нужно заготовить 800 *т* рыбы.

З а д а ч а 3. Поезд шёл из Риги в Москву. Когда он миновал 276-й километр, один из пассажиров спросил проходящего кондуктора, какую часть пути они уже проехали. На это кондуктор ответил: «Проехали уже 30% всего пути». Каково расстояние от Риги до Москвы?

Из условия задачи видно, что 30% пути от Риги до Москвы составляют 276 *км*. Нам нужно найти всё расстояние между этими городами, т. е. по данной части найти целое:

$$276 : \frac{30}{100} = \frac{276 \cdot 100}{30} = 920\ (км).$$

## § 91. Взаимно обратные числа. Замена деления умножением.

Возьмём дробь $\frac{2}{3}$ и переставим числитель на место знаменателя, получится $\frac{3}{2}$. Мы получили дробь, о б р а т н у ю данной. Для того чтобы получить дробь, обратную данной, нужно её числитель поставить на место знаменателя, а знаменатель — на место числителя. Этим способом мы можем получить дробь, обратную любой дроби. Например:

$$\frac{3}{4}, \text{ обратная } \frac{4}{3}; \quad \frac{5}{6}, \text{ обратная } \frac{6}{5}.$$

Две дроби, обладающие тем свойством, что числитель первой является знаменателем второй, а знаменатель первой является числителем второй, называются **взаимно обратными.**

Теперь подумаем, какая дробь будет обратной для $\frac{1}{2}$. Очевидно, это будет $\frac{2}{1}$, или просто 2. Отыскивая дробь, обратную данной, мы получили целое число. И этот случай не единичный; напротив, для всех дробей с числителем 1 (единица) обратными будут целые числа, например:

$$\frac{1}{3}, \text{ обратная } 3; \ \frac{1}{5}, \text{ обратная } 5.$$

Так как при отыскании обратных дробей мы встретились и с целыми числами, то в дальнейшем мы будем говорить не об обратных дробях, а об обратных числах.

Выясним, как написать число, обратное целому числу. Для дробей это решается просто: нужно знаменатель поставить на место числителя. Этим же способом можно получить обратное число и для целого числа, так как у любого целого числа можно подразумевать знаменатель 1. Значит, число, обратное 7, будет $\frac{1}{7}$, потому что $7 = \frac{7}{1}$; для числа 10 обратное будет $\frac{1}{10}$, так как $10 = \frac{10}{1}$.

Эту мысль можно выразить иначе: **число, обратное данному числу, получается от деления единицы на данное число.** Такое утверждение справедливо не только для целых чисел, но и для дробей. В самом деле, если требуется написать число, обратное дроби $\frac{5}{9}$, то мы можем взять 1 и разделить её на $\frac{5}{9}$, т. е.

$$1 : \frac{5}{9} = \frac{9}{5}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Теперь укажем одно с в о й с т в о взаимно обратных чисел, которое будет нам полезно: **произведение взаимно обратных чисел равно единице.** В самом деле:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1; \quad \frac{1}{12} \cdot 12 = 1; \quad \frac{9}{17} \cdot \frac{17}{9} = 1.$$

Пользуясь этим свойством, мы можем находить обратные числа следующим путём. Пусть нужно найти число, обратное 8. Обозначим его буквой $x$, тогда $8 \cdot x = 1$, отсюда $x = \frac{1}{8}$. Найдём ещё число, обратное $\frac{7}{12}$; обозначим его буквой $x$, тогда $\frac{7}{12} \cdot x = 1$, отсюда $x = 1 : \frac{7}{12}$, или $x = \frac{12}{7}$.

Мы ввели здесь понятие о взаимно обратных числах для того, чтобы немного дополнить сведения о делении дробей.

Когда мы делим число 6 на $\frac{3}{5}$, то мы выполняем следующие действия:

$$6 : \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{1} = 10.$$

Обратите особое внимание на выражение $\frac{6 \cdot 5}{3}$ и сравните его с заданным: $6 : \frac{3}{5}$.

Если взять выражение $\frac{6 \cdot 5}{3}$ отдельно, без связи с предыдущим, то нельзя решить вопрос, откуда оно возникло: от деления 6 на $\frac{3}{5}$ или от умножения 6 на $\frac{5}{3}$. В обоих случаях получается одно и то же. Поэтому мы можем сказать, что **деление одного числа на другое можно заменить умножением делимого на число, обратное делителю.**

Примеры, которые мы даём ниже, вполне подтверждают этот вывод:

$$1)\ 12 : \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{4}{3} = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16;$$

$$2)\ 18 : \frac{5}{6} = 18 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18 \cdot 6}{5} = \frac{108}{5} = 21\frac{3}{5}.$$

---

Глава одиннадцатая.

# Распространение законов и свойств действий на дробные числа.

## § 92. Сложение.

При изучении целых чисел мы рассматривали различные свойства действий. Теперь, после ознакомления с дробями, мы покажем, что эти свойства остаются справедливыми и для дробных чисел.

**1. Сумма дробных чисел подчиняется переместительному закону,** т. е. сумма не изменяется от перемены мест слагаемых.

Возьмём две дроби: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Сумма этих двух дробей $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ равна $\frac{5}{6}$ независимо от того, в каком порядке мы будем складывать эти дроби, т. е.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.$$

**2. Сумма дробных чисел подчиняется сочетательному закону,** т. е. сумма не изменится, если какую-нибудь группу рядом стоящих слагаемых мы заменим их суммой.

Сумма трёх дробей $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{15}$ и $\frac{8}{15}$ может быть получена различной группировкой слагаемых, например:

$$\frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{8}{15}=\left(\frac{1}{15}+\frac{4}{15}\right)+\frac{8}{15}=\frac{1}{15}+\left(\frac{4}{15}+\frac{8}{15}\right)=\frac{13}{15}.$$

**3. Если какое-либо слагаемое увеличим или уменьшим на какое-нибудь число, то и сумма увеличится или уменьшится на то же самое число.**

Найдём сумму двух дробей, например:

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{4}=\frac{5}{8}+\frac{6}{8}=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}.$$

Прибавим к первому слагаемому $\frac{1}{8}$ и посмотрим, как при этом изменится сумма.

Если мы выполним вычисления, то увидим, что сумма увеличилась на $\frac{1}{8}$, т. е. на столько же, на сколько было увеличено первое слагаемое.

Далее, можно проверить, что с уменьшением одного слагаемого на какое-нибудь число сумма уменьшится на то же самое число.

## § 93. Вычитание

Разность дробных чисел изменяется при изменении данных чисел, т. е. уменьшаемого и вычитаемого, совершенно так же, как и разность целых чисел.

1. $\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. Прибавим к уменьшаемому $\frac{1}{10}$; получим:

$$\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},$$

вычтем теперь из $\frac{4}{5}$ вычитаемое, т. е. $\frac{1}{5}$, найдём:

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$$

Новая разность $\left(\frac{3}{5}\right)$ больше прежней разности $\left(\frac{1}{2}\right)$ на $\frac{1}{10}$. Значит, **если уменьшаемое увеличим на какое-нибудь число, не изменяя вычитаемого, то и разность увеличится на то же самое число.**

2. Очевидно, что **если уменьшаемое уменьшим на какое-нибудь число, не изменяя вычитаемого, то разность уменьшится на то же самое число.**

Рекомендуем проверить справедливость этого утверждения, взяв для вычитания любые две дроби.

3. Перейдём теперь к вычитаемому. Пусть мы нашли разность двух дробей:

$$\frac{14}{15}-\frac{11}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}.$$

Прибавим к вычитаемому дробь $\frac{2}{15}$:

$$\frac{11}{15}+\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

Вычтем теперь из $\frac{14}{15}$ новое вычитаемое $\frac{13}{15}$:

$$\frac{14}{15}-\frac{13}{15}=\frac{1}{15}.$$

Разность равна теперь не $\frac{1}{5}$, а $\frac{1}{15}$, т. е. она уменьшилась на $\frac{2}{15}$.

Значит, **если вычитаемое увеличим на какое-нибудь число, то разность уменьшится на то же число.**

4. Возьмём теперь две другие дроби $\frac{10}{11}$ и $\frac{1}{2}$ и вычтем из большей меньшую:

$$\frac{10}{11}-\frac{1}{2}=\frac{20}{22}-\frac{11}{22}=\frac{9}{22}.$$

Если будем уменьшать вычитаемое и при этом учитывать, что произойдёт с разностью, то увидим, что **при уменьшении вычитаемого на какое-нибудь число разность увеличится на то же число.**

5. Найдём разность двух следующих дробей:

$$\frac{31}{40}-\frac{27}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Увеличим одновременно уменьшаемое и вычитаемое на $\frac{1}{40}$ и опять выполним вычитание:

$$\left(\frac{31}{40}+\frac{1}{40}\right)-\left(\frac{27}{40}+\frac{1}{40}\right)=\frac{32}{40}-\frac{28}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Мы видим, что одновременное увеличение уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число не изменяет разности.

Уменьшим теперь одновременно уменьшаемое и вычитаемое на $\frac{3}{40}$ и снова выполним вычитание:

$$\left(\frac{31}{40}-\frac{3}{40}\right)-\left(\frac{27}{40}-\frac{3}{40}\right)=\frac{28}{40}-\frac{24}{40}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}.$$

Снова разность осталась без изменения. Таким образом, можно сказать: **если уменьшаемое и вычитаемое увеличим или уменьшим на одно и то же число, то разность не изменится.**

## § 94. Умножение.

1. **Произведение дробных чисел подчиняется переместительному закону,** т. е. произведение не изменяется от перемены мест сомножителей.

Если мы возьмём две какие-нибудь дроби, например $\frac{4}{5}$ и $\frac{2}{3}$, то можно написать:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}.$$

2. **Произведение дробных чисел подчиняется сочетательному закону,** т. е. произведение не изменяется, если какую-нибудь группу рядом стоящих сомножителей мы заменим их произведением.

Произведение трёх дробных чисел: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, может быть получено различной группировкой сомножителей, например:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

3. **Произведение дробных чисел подчиняется распределительному закону,** т. е. произведение суммы нескольких дробных чисел на какое-нибудь число равно сумме произведений каждого из дробных чисел на это число. Например:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\cdot 6=\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{3}{4}\cdot 6=11\frac{1}{2}.$$

Заметим, что множитель мог быть и дробным числом.

4. Рассмотрим изменение произведения в зависимости от изменения сомножителей. Найдём произведение $\frac{14}{15}$ и $\frac{1}{2}$:

$$\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{15}.$$

Увеличим первый сомножитель в 3 раза и снова выполним умножение:

$$\left(\frac{14}{15}\cdot 3\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{14}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{5}.$$

Сравним этот результат с предыдущим посредством деления:

$$\frac{7}{5}:\frac{7}{15}=\frac{7\cdot 15}{5\cdot 7}=3.$$

Таким образом, новое произведение в 3 раза больше прежнего.

Следовательно, мы можем сказать: **если один из двух сомножителей увеличим в несколько раз, а другой оставим без изменения, то произведение увеличится во столько же раз.**

Теперь у м е н ь ш и м в 2 раза хотя бы второй сомножитель и снова выполним умножение:

$$\frac{14}{15}\cdot\left(\frac{1}{2}:2\right)=\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{30}.$$

Первоначальное произведение было $\frac{7}{15}$, а новое $\frac{7}{30}$. У этих дробей числители одинаковы, но знаменатель первой в 2 раза меньше, чем знаменатель второй; значит, первая дробь в 2 раза больше второй.

Полученный результат показывает, что, уменьшая один из сомножителей в 2 раза, мы тем самым и произведение уменьшим в 2 раза. Следовательно, **если один из сомножителей уменьшим в несколько раз, то произведение уменьшится во столько же раз.**

## § 95. Деление.

Частное от деления дробных чисел изменяется при изменении делимого и делителя совершенно так же, как изменяется частное от деления целых чисел.

1. Возьмём пример: $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}=\frac{8}{9}$.

Если теперь у в е л и ч и м д е л и м о е, например в 2 раза, и посмотрим, как при этом изменится частное, то увидим, что новое частное будет в 2 раза больше первоначального.

Таким образом, **если делимое увеличим в несколько раз, то частное увеличится во столько же раз.**

2. Возьмём тот же самый пример $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{8}{9}$ и у м е н ь ш и м д е л и м о е в 3 раза, а затем посмотрим, что произойдёт от этого с частным.

Выполнив необходимые вычисления, мы увидим, что частное уменьшилось тоже в 3 раза. Следовательно, **если делимое умень-**

**шим в несколько раз, то частное уменьшится во столько же раз.**

3. Разделим теперь $\frac{7}{8}$ на $\frac{1}{4}$:

$$\frac{7}{8} : \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 1} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Если увеличим делитель $\left(\frac{1}{4}\right)$, например в 2 раза, и снова выполним деление, то увидим, что частное уменьшится тоже в 2 раза.

Значит, **если увеличим делитель в несколько раз, то частное уменьшится во столько же раз.**

4. Возьмём пример: $\frac{7}{8} : \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$, и уменьшим делитель $\left(\frac{1}{4}\right)$ хотя бы в 4 раза, затем выполним снова деление.

Вычисления покажут, что **если делитель уменьшить в несколько раз, то частное увеличится во столько же раз.**

5. Рассмотрим, наконец, что произойдёт с частным при одновременном увеличении или уменьшении делимого и делителя в одинаковое число раз.

а) Найдём частное от деления $\frac{4}{9}$ на $\frac{5}{12}$:

$$\frac{4}{9} : \frac{5}{12} = \frac{4 \cdot 12}{9 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

Увеличим делимое и делитель в 3 раза и снова выполним деление:

$$\left(\frac{4}{9} \cdot 3\right) : \left(\frac{5}{12} \cdot 3\right) = \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

Частное осталось без изменения.

б) Уменьшим в прежнем примере делимое и делитель в 4 раза и снова выполним деление:

$$\left(\frac{4}{9} : 4\right) : \left(\frac{5}{12} : 4\right) = \frac{1}{9} : \frac{5}{48} = \frac{1 \cdot 48}{9 \cdot 5} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}.$$

Частное снова осталось без изменения.

Таким образом, если **при делении дробных чисел увеличить или уменьшить делимое и делитель одновременно в одинаковое число раз, то частное не изменится.**

---

Глава двенадцатая.

# Отношение величин.

## § 96. Понятие об отношении.

Рассмотрим задачу: «Верёвка длиной в 5 *м* стоит 2 руб. Сколько будет стоить верёвка длиной в 20 *м*?»

На этот вопрос мы можем ответить так: найдём сначала цену одного метра верёвки:

$$2 \text{ руб.} : 5 = 40 \text{ коп.}$$

Теперь найдём цену 20 *м*.

$$40 \text{ коп.} \cdot 20 = 800 \text{ коп.} = 8 \text{ руб.}$$

Таким образом, 5 *м* верёвки стоят 2 руб., а 20 *м* верёвки стоят 8 руб.

При решении этой задачи можно пойти и другим путём: сначала установить, во сколько раз *вторая* верёвка длиннее *первой*. Для этого достаточно разделить 20 *м* на 5 *м*:

$$20 \text{ м} : 5 \text{ м} = 4, \text{ или } \frac{20 \text{ м}}{5 \text{ м}} = 4.$$

Вторая верёвка в 4 раза длиннее первой, значит и стоит она в 4 раза дороже первой (8 руб.)

Таким же путём, т. е. путём деления, можно сравнить длину *первой* верёвки с длиной *второй*, и тогда получится:

$$5 \text{ м} : 20 \text{ м}, \text{ или } \frac{5 \text{ м}}{20 \text{ м}} = \frac{1}{4}.$$

Это значит, что первая верёвка составляет четверть второй.

В этой задаче мы рассматривали верёвки различной длины:

1-я — 5 *м*,

2-я — 20 *м*.

Мы сравнивали вторую с первой: $\frac{20 \text{ м}}{5 \text{ м}} = 4$ (длина второй верёвки в 4 раза больше длины первой) и первую со второй: $\frac{5 \text{ м}}{20 \text{ м}} = \frac{1}{4}$ (длина первой верёвки составляет четверть длины второй).

В математике принято говорить, что *отношение* 20 *м* к 5 *м* равно 4, а *отношение* 5 *м* к 20 *м* равно $\frac{1}{4}$.

Отношение величин часто приходится находить при решении самых разнообразных задач.

Представим себе, что мы следили за летней погодой в течение трёх лет и записали, что в одном году летом солнечных дней было

60, а дождливых 30; в следующем году солнечных было 45, а дождливых тоже 45 и, наконец, в третьем году солнечных 40, а дождливых 50.

Мы видим, что в первом году солнечных дней было больше, чем дождливых, и можем ответить на вопрос, во сколько раз одно из этих чисел больше другого, или: сколько раз второе число содержится в первом. Ответ на этот вопрос найдём посредством деления:

$$60 : 30 = 2, \quad \text{или} \quad \frac{60}{30} = 2.$$

Обычно не принято доводить это деление до конца, т. е. находить величину отношения 2, а принято лишь связывать данные числа знаком деления, т. е. либо двоеточием, либо дробной чертой:

$$60 : 30, \ \text{или} \ \frac{60}{30}.$$

Эти записи удобны тем, что благодаря им мы сохраняем сравниваемые числа и не забываем их. Числа 60 и 30 дают нам ответ на вопрос, сколько было солнечных и дождливых дней, а знак деления между ними указывает на факт их сравнения. Записи, вроде сделанных выше, обычно читаются так: число солнечных дней *относится* к числу дождливых, как 60 к 30.

Если сравниваемые числа имеют общий делитель, то их можно на него разделить. Числа 60 и 30 можно разделить на 30, и тогда наши выражения, написанные выше, примут вид:

$$2 : 1, \ \text{или} \ \frac{2}{1},$$

а читать их теперь можно так: число солнечных дней относится к числу дождливых, как 2 к 1. Пояснить эту мысль можно так: солнечных дней было в 2 раза больше, чем дождливых. Правда, после сделанного деления на 30 исчезли данные числа, и мы, когда видим записи 2 : 1, или $\frac{2}{1}$, не можем сказать, сколько же было каких дней, но зато у нас сохранилось легко схватываемое *отношение* между ними.

Перейдём теперь ко второму году. Выше было сказано, что во втором году было 45 солнечных дней и 45 дождливых. И в этом случае можно написать одно из выражений:

$$45 : 45, \ \text{или} \ \frac{45}{45}.$$

Если разделить эти числа на 45, то отношения примут вид:

$$1 : 1 \ \text{или} \ \frac{1}{1} \ (\text{один к одному}).$$

На третий год число солнечных дней было 40, а дождливых 50. Значит, для сопоставления тех и других можно написать:

$$40:50, \text{ или } \frac{40}{50}.$$

Здесь, очевидно, можно разделить эти числа на 10 и тогда получится: $4:5$, или $\frac{4}{5}$. В каждом из этих трёх случаев мы находили отношение двух величин.

Значит, **отношением двух однородных величин называется число** (целое или дробное), **указывающее, во сколько раз одна величина больше другой или какую часть одна величина составляет от другой.**

Два числа, составляющие отношение, называют **членами отношения.** Первый член отношения называется **предыдущим,** а второй — **последующим**; например, в отношении $\frac{5}{9}$ число 5 есть предыдущий член, а 9 — последующий. В общем виде отношение двух чисел ($a$ и $b$) записывается так: $\frac{a}{b}$, где

$a$ — предыдущий член отношения,
$b$ — последующий член отношения.

Запомним некоторые **свойства отношения.** Так как отношение двух чисел мы находим посредством деления, то для него остаются справедливыми свойства, изложенные в своё время для деления.

**1. Отношение не изменится, если члены его умножить или разделить на одно и то же число.**

Например, если имеем отношение $30:10$, то, умножив его члены на 5, получим $150:50$ и этим не изменим отношения, а деля члены отношения, положим, на 2, получим $15:5$ и тоже не изменим отношения. Мы видим, что все эти три отношения могут быть заменены одним: $3:1$.

В общем виде это свойство можно записать так:

$$a:b = am:bm = \frac{a}{m}:\frac{b}{m}.$$

**2. Первый член отношения** (предыдущий) **может быть любым числом, а второй член** (последующий) **может быть любым числом, кроме нуля.**

Среди рассмотренных нами случаев попадались только отношения целых чисел, но в дальнейшем мы часто будем встречаться и с отношениями дробных чисел. Например, вполне возможны такие отношения:

$$2\frac{1}{2}\,м : 1\frac{1}{4}\,м = 2, \text{ или } \frac{2\frac{1}{2}\,м}{1\frac{1}{4}\,м} = 2;$$

$$2\,кг : \frac{1}{2}\,кг = 4, \text{ или } \frac{2\,кг}{\frac{1}{2}\,кг} = 4.$$

Отношение двух дробей можно заменить отношением целых чисел. Возьмём отношение каких-нибудь чисел: $3\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$, и освободим его от дробных членов. Для этого сначала обратим смешанное число $\left(3\frac{1}{2}\right)$ в неправильную дробь и умножим члены отношения на наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей:

$$3\frac{1}{2} : \frac{2}{5} = \frac{7}{2} : \frac{2}{5} = \left(\frac{7}{2} \cdot 10\right) : \left(\frac{2}{5} \cdot 10\right) = 35 : 4.$$

Мы умножили предыдущий и последующий члены отношения на 10, от чего отношение не изменилось. Отношение дробных чисел $3\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$ заменилось отношением целых чисел $35 : 4$.

**Обратные отношения.** Пусть нужно сравнить два отрезка *AB* и *CD* (рис. 21). Если первый из них содержит 5 таких единиц

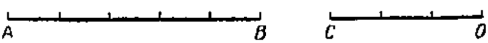


Рис. 21.

(например, сантиметров), каких второй содержит 3, то мы можем сравнить их путём деления 5 на 3. Результат сравнения выразится отношением $5 : 3$, или $\frac{5}{3}$.

При сравнении отрезков *AB* и *CD* мы считали первым *AB*, а вторым *CD* и брали отношение *AB* к *CD*; но можно было бы поступить наоборот, т. е. искать отношение *CD* к *AB*, тогда у нас получилось бы такое отношение: $3 : 5$, или $\frac{3}{5}$.

Значит, при сравнении величин мы можем получить два таких отношения, у которых предыдущий член одного будет последующим членом другого, и наоборот. Такие два отношения называются **обратными.**

Запомните, что **произведение обратных отношений равно единице.** В самом деле, произведение полученных выше отношений:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1.$$

Выше было сказано, что отношение получается в результате деления. В некоторых случаях это деление не доводится до конца, а только обозначается (5 : 3); в других случаях, например при решении задач, вычисляют величину отношения и выражают ее одним числом; например, отношение 15 *м* к 3 *м* можно написать так: 15 : 3 = 5; отношение метра к сантиметру 100 : 1 = 100.

### § 97. Нахождение процентного отношения чисел.

Эта задача имеет следующий смысл: выразить в процентах отношение двух данных чисел. Вы уже знаете, что отношение позволяет сравнивать числа по величине. Если, например, у меня 6 чёрных карандашей и 3 красных, то отношение 6 : 3 показывает, что чёрных карандашей в два раза больше, чем красных, а обратное отношение 3 : 6 показывает, что число красных карандашей составляет половину числа чёрных. Но эти отношения мы могли бы выразить в процентах, т. е. найти не просто отношения чисел, а их **процентные отношения.** Лучше всего можно выяснить этот вопрос на задачах.

З а д а ч а 1. В истекшем учебном году одна школа выпустила 200 семиклассников. Из них 120 учеников поступили в восьмые классы, а остальные пошли в специальные учебные заведения. Сколько процентов учащихся пошло в восьмые классы?

Можно рассуждать так: если на две сотни выпускников приходится 120 поступивших в восьмые классы, то на одну сотню их придётся в 2 раза меньше, т. е. 60.

Иными словами, из числа окончивших седьмые классы 60% перешли в восьмые классы. Это и есть процентное отношение 120 к 200.

Мы рассмотрели наиболее простую задачу. Как же решаются вообще задачи такого типа? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим новую задачу.

З а д а ч а 2. Нужно было вспахать 300 *га* земли. В первый день вспахали 120 *га*. Сколько процентов земли вспахали в первый день?

В этой задаче требуется ответить на вопрос: сколько процентов число 120 составляет от числа 300, или, иными словами: если 300 *га* принять за 100%, то сколько процентов составляют 120 *га*.

Будем рассуждать так: 300 *га* приняты за 100%. Чему же равен 1%? Очевидно, он в 100 раз меньше, т. е.

$$300 : 100 = 3 \ (\text{га}).$$

Теперь посмотрим, сколько процентов составляют 120 *га*. Если 3 *га* соответствуют одному проценту, то 120 *га* соответствуют стольким процентам, сколько раз 3 содержится в 120, т. е.

$$120 : 3 = 40.$$

Значит, в первый день вспахали 40% земли.

Чтобы получить правило решения этих задач, нужно выявить, какие действия мы сделали.

$$120 : \frac{300}{100} = \frac{120 \cdot 100}{300}, \text{ или } \frac{120}{300} \cdot 100.$$

Значит, **чтобы вычислить процентное отношение двух чисел, нужно найти отношение этих чисел и умножить его на 100.**

Теперь применим это правило к решению новой задачи.

Задача 3. В доме отдыха отдыхают 200 человек, среди них 80 мужчин и 120 женщин. Найти процентное отношение числа мужчин и числа женщин к общему числу отдыхающих.

Сколько процентов составляет число мужчин?

$$\frac{80}{200} \cdot 100 = 40 \ (\%).$$

Сколько процентов составляет число женщин?

$$\frac{120}{200} \cdot 100 = 60 \ (\%).$$

## § 98. Числовой масштаб.

Изобразить какой-нибудь предмет на бумаге в натуральную величину почти никогда не удаётся. Если размеры предмета превышают величину листа бумаги, на котором этот предмет изображается, то такой предмет чертят в уменьшённом виде. Но всякий чертёж (или план) должен давать возможность судить об истинных размерах предмета, который на нём изображён, т. е. на таком чертеже должны быть даны указания, во сколько раз отрезки, изображённые на бумаге, меньше соответствующих отрезков в натуре. Делается это следующим образом: если ширина классной доски 1 *м*, а мы изображаем её на бумаге в виде 1 *дм*, то размер предмета на бумаге в 10 раз меньше его размера в натуре. В этом случае говорят, что предмет изображён в масштабе «один к десяти», и пишут так: масштаб 1 : 10, или $\frac{1}{10}$. Здесь единица обозначает 1 *дм* на бумаге, а десять — 10 *дм* (1 *м*) в натуре. Отношение 1 : 10 называется **числовым масштабом плана.**

Одна из задач, решаемых при помощи числового масштаба, состоит в том, что, имея план какого-нибудь участка и зная масштаб, мы можем вычислить истинные размеры этого участка или его частей, т. е. размеры в натуре. Например, нам дан план (или карта) какой-либо местности. На нём указан числовой масштаб 1 : 1 000.

Требуется найти в натуре расстояние между двумя пунктами, которое на плане равно 4 *см*. Принимая во внимание данный числовой масштаб, мы можем сказать, что все размеры в натуре в 1 000 раз больше соответствующих размеров на плане.

Следовательно, расстояние между двумя указанными пунктами найдём, если число 4 *см* умножим на 1 000;

$$4 \text{ см} \times 1\,000 = 4\,000 \text{ см} = 40 \text{ м}.$$

---

Глава тринадцатая.

# Решение задач с геометрическим содержанием.

## § 99. Поверхность куба и прямоугольного параллелепипеда.

Задача 1. Найти полную поверхность куба, ребро которого равно 25 *см*.

Полная поверхность куба состоит из площадей шести равных между собой квадратов. Значит, для определения полной поверхности куба нужно вычислить сначала площадь одного квадрата (одной грани), а потом умножить найденное число на число всех граней, т. е. на 6.

Решение задачи будет такое:

1) Найдём площадь одного квадрата (одной грани):

$$25 \times 25 = 625 \text{ (кв. см)}.$$

2) Найдём площадь 6 граней:

$$625 \times 6 = 3\,750 \text{ (кв. см)}.$$

Задача 2. Сколько квадратных метров фанеры потребуется для того, чтобы обить с боков деревянный ящик, имеющий следующие размеры: длина $1\frac{1}{5}$ *м*, ширина $\frac{4}{5}$ *м* и высота 2 *м*?

Ящик имеет форму прямоугольного параллелепипеда указанных размеров. Чтобы ответить на вопрос задачи, мы должны вычислить боковую поверхность этого параллелепипеда. Боковая поверхность составляется из площадей 4 прямоугольников. Можно было бы последовательно вычислить площадь каждого прямоугольника, а затем сложить полученные результаты. Но можно указать другой, более короткий путь решения этой задачи.

Если мы возьмём бумажную модель прямоугольного параллелепипеда, отнимем оба основания («дно» и «крышку»), а оставшуюся поверхность (боковую) развернём, то мы получим фигуру, изображённую на рисунке 22. Это есть не что иное, как прямоугольник, длина которого представляет собой сумму четырёх чисел: $1\frac{1}{5}$ *м*; $\frac{4}{5}$ *м*; $1\frac{1}{5}$ *м*; $\frac{4}{5}$ *м*, а ширина равна 2 *м*. Для вычисления площади этого прямоугольника поступим так:

$$\left(1\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+1\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)\cdot 2 = 4\cdot 2 = 8 \text{ (кв. м)}.$$

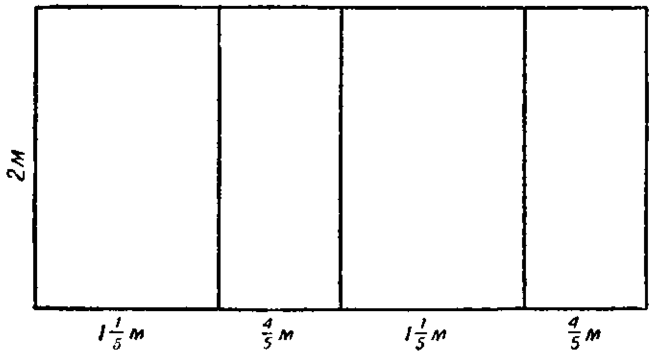


Рис. 22.

Теперь подумаем, что представляет собой сумма чисел, заключённых в скобки. Это есть не что иное, как **периметр** прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда. Ширина же прямоугольника есть высота параллелепипеда.

Отсюда можно сделать вывод: **для вычисления боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда надо периметр его основания умножить на высоту.**

З а д а ч а 3. Мастерская наглядных пособий изготовила из картона 1 000 моделей прямоугольных параллелепипедов. Каждый параллелепипед имеет следующие размеры: длина 16 *см*, ширина 12 *см* и высота 25 *см*. Сколько квадратных метров картона израсходовано на эти модели?

Найдём сначала полную поверхность одного прямоугольного параллелепипеда. Полная поверхность составляется из боковой поверхности и площадей двух равных между собой оснований. Запишем это так:

Боковая поверхность: $(16 + 12 + 16 + 12) \cdot 25$.

Площадь двух оснований: $2(16 \cdot 12)$.

Полная поверхность: $56 \cdot 25 + 2 \cdot 192 = 1\,784$ (*кв. см*).

Теперь найдём, сколько пойдёт картона на 1 000 таких моделей: $1\,784 \cdot 1\,000 = 1\,784\,000$ (*кв. см*).

Выразим квадратные сантиметры в квадратных метрах:

$$\frac{1784000}{10000} = 178\frac{2}{5} \text{ (кв. м)}.$$

## § 100. Площадь треугольника и четырёхугольника.

Как вычисляется площадь треугольника?

Мы умеем вычислять площадь прямоугольника (стр. 62).

Попробуем сопоставить прямоугольник и треугольник.

Основанием прямоугольника можно назвать его длину, а высотой — ширину. Основанием треугольника можно назвать любую сторону, например *KP*, а высотой (*HE*) — отрезок, идущий от вершины противолежащего угла к основанию под прямым углом (рис. 23).

В прямоугольнике *ABCD* проведём диагональ *AC*. Она разделит прямоугольник на два равных треугольника *ABC* и *АСД*. Чтобы убедиться в их равенстве, достаточно вырезать прямоугольник

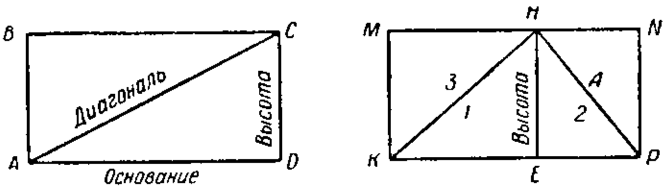


Рис. 23.

из бумаги, разрезать его по диагонали и наложить друг на друга два образовавшихся треугольника. Они в точности совместятся.

Отсюда следует, что площадь прямоугольника вдвое больше площади каждого из двух треугольников, полученных после проведения в нём диагонали. Очевидно, можно сказать и наоборот: площадь каждого из двух треугольников, полученных из прямоугольника путём проведения в нём диагонали, вдвое меньше площади этого прямоугольника.

Для подтверждения этого вывода рассмотрим ещё прямоугольник *KMNP*. Возьмём на стороне его *MN* какую-нибудь точку *H* и соединим её с точками *K* и *P*. Получится треугольник *KHP*, который тоже составляет половину прямоугольника. Почему? Треугольник *KHP* состоит из двух маленьких треугольников, которые на чертеже обозначены цифрами *1* и *2*. Кроме того, если бы мы вырезали из прямоугольника треугольник *KHP*, то остались бы два треугольника, обозначенные цифрами 3 и 4. Треугольник 3 равен треугольнику 1, а треугольник 4 равен треугольнику 2. Если треугольник 3 приставить равной стороной *MK* к треугольнику 4, то составится новый треугольник, равный треугольнику *KHP*.

Значит треугольник *KHP* составляет половину прямоугольника, имеющего с ним одинаковые основание и высоту.

Если обозначим площадь треугольника буквой $S$, основание — буквой $a$, высоту — буквой $h$, то можно записать формулу для вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}ah.$$

**Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.**

З а д а ч а 1. Найти площадь $S$ треугольного ската железной крыши, если основание этого треугольника $a = 6\frac{1}{2}$ *м*, а его высота $h = 5\frac{3}{4}$ *м*.

Решение задачи можем записать в таком виде:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2} \cdot 5\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2}\frac{23}{4} = \frac{299}{16} = 18\frac{11}{16} (\textit{кв. м}).$$

З а д а ч а 2. Найти площадь четырёхугольника, разбив его на два треугольника.

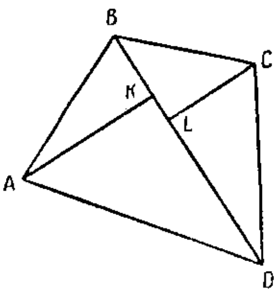

Рис. 24.

Эту задачу следует решать так. Надо построить произвольный четырёхугольник (рис. 24) и провести в нём одну диагональ. Получится два различных треугольника. Затем в каждом из них провести высоту. Диагональ будет общим основанием для обоих треугольников. После этого с помощью циркуля и измерительной линейки нужно измерить основание треугольников (диагональ) и каждую высоту. Найдя эти размеры, нужно вычислить площадь каждого треугольника в отдельности и полученные числа сложить.

## § 101. Модели и развёртки.

В § 61 (стр. 68) мы занимались вычислением объёма прямоугольного параллелепипеда. Мы говорили, что моделью параллелепипеда может служить спичечная коробка, которая всегда имеется под руками. Модель куба встречается менее часто; среди детских игрушек можно найти так называемую складную азбуку, в которой на кубиках изображены буквы нашего алфавита.

Однако лучше всего изготовить модели своими руками, бережно их сохранять и пользоваться ими в тех случаях, когда в этом встретится надобность. Модели куба и прямоугольного параллелепипеда можно сделать из разных материалов — из дерева, гипса, мела, стекла, бумаги и т. д.

Наиболее полезными для учебных целей являются те модели, которые делаются из плотной бумаги и допускают возможность их развёртывания.

Мы рекомендуем изготовить четыре модели: кубического сантиметра, кубического дециметра, ещё одного куба любого другого размера и прямоугольного параллелепипеда. Первые две модели будут служить для наглядного представления о размерах кубического сантиметра и дециметра, а две последние будут полезны при решении задач.

Развёртку (выкройку) куба можно изготовить так.

Взять лист плотной бумаги и вырезать из неё фигуру, как показано на рисунке 25. Эта фигура будет состоять из шести равных между собой квадратов. Сторона каждого квадрата пусть будет равна, например, 5 *см*. У трёх квадратов имеются запасные края для подклейки. Если согнуть чертёж по указанным прямым линиям и подклеить края, то получится куб.

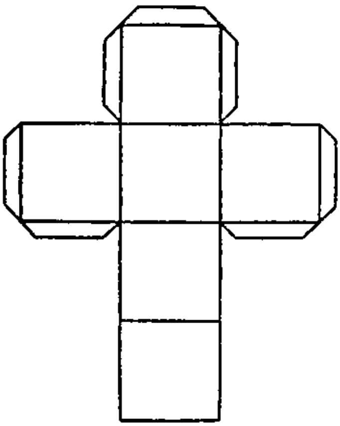

Рис. 25.

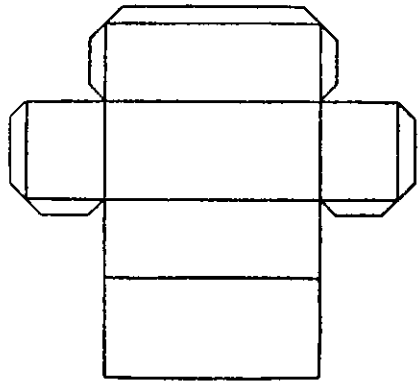

Рис. 26.

Развёртку прямоугольного параллелепипеда можно изготовить так. Возьмём, например, для параллелепипеда такие размеры: длина 7 *см*, ширина 5 *см* и высота 12 *см*. Берём лист плотной бумаги и вырезаем из неё фигуру, как показано на рисунке 26. Эта фигура будет состоять из двух прямоугольников с размерами $12 \times 7$ *см*, двух прямоугольников с размерами $12 \times 5$ *см* и двух прямоугольников с размерами $7 \times 5$ *см*. У трёх прямоугольников имеются запасные края для подклейки. Сгибая чертёж по указанным прямым линиям и подклеивая края, получим прямоугольный параллелепипед.

# *Часть третья.*
# Десятичные дроби.

## Глава четырнадцатая.
## Общие сведения о десятичных дробях.

### § 102. Предварительные разъяснения.

В предыдущей части мы рассматривали дроби со всевозможными знаменателями и называли их обыкновенными дробями. Нас интересовала всякая дробь, которая возникала в процессе измерения или деления, независимо от того, какой у нас получался знаменатель.

Теперь из всего множества дробей мы выделим дроби со знаменателями: 10, 100, 1 000, 10 000 и т. д., т. е. такие дроби, знаменателями которых являются только числа, изображаемые единицей (1) с последующими нулями (одним или несколькими). Такие дроби называются **десятичными.**

Вот примеры десятичных дробей:

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{3}{100}, \quad \frac{7}{1000}, \quad \frac{9}{10000}, \quad \frac{11}{100000}, \quad \frac{3}{1000000} \text{ и т. д.}$$

С десятичными дробями мы встречались и раньше, но не указывали никаких особых присущих им свойств. Теперь мы покажем, что они обладают некоторыми замечательными свойствами, вследствие чего упрощаются все вычисления с дробями.

### § 103. Изображение десятичной дроби без знаменателя.

Десятичные дроби обычно записывают не так, как обыкновенные, а по тем правилам, по которым записываются целые числа.

Чтобы понять, каким образом записать десятичную дробь без знаменателя, нужно припомнить, как пишется по десятичной системе любое целое число. Если, например, мы напишем трёхзначное число при помощи одной только цифры 2, т. е. число 222, то каждая из этих двоек будет иметь особое значение в зависимости от того места, какое она занимает в числе. Первая двойка с п р а в а обозначает единицы, вторая — десятки, третья — сотни. Таким образом, всякая цифра, стоящая влево от какой-либо другой цифры, обозначает единицы, в десять раз бо́льшие, чем те, которые обозначены предыдущей цифрой. Если какой-либо разряд отсутствует, то на его месте пишут нуль.

Итак, в целом числе на первом месте справа стоят единицы, на втором месте — десятки и т. д.

Теперь поставим вопрос, какого разряда единицы получатся, если мы, например, в числе 222 с п р а в о й стороны припишем ещё одну цифру. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно принять во внимание, что последняя двойка (первая справа) обозначает единицы.

Следовательно, если после двойки, обозначающей единицы, мы, немного отступя, напишем ещё какую-нибудь цифру, например 3, то она будет обозначать единицы, в д е с я т ь р а з м е н ь ш и е предыдущих, иными словами, она будет обозначать д е с я т ы е д о л и единицы; получится число, содержащее 222 целых единицы и 3 десятые доли единицы.

Принято между целой и дробной частью числа ставить запятую, т. е. писать так:

$$222{,}3$$

и читать: двести двадцать две целых, 3 десятых.

Если мы после тройки в этом числе припишем ещё цифру, например 4, то она будет обозначать 4 с о т ы х доли единицы; число примет вид:

$$222{,}34$$

и произносится: двести двадцать две целых, тридцать четыре сотых.

Новая цифра, например 5, будучи приписана к этому числу, даёт нам т ы с я ч н ы е д о л и: 222,345 (двести двадцать две целых, триста сорок пять тысячных).

Для большей ясности расположение в числе целых и дробных разрядов можно представить в виде таблицы:

| Целая часть | | | | Дробная часть | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| сотни | десятки | единицы | , | десятые | сотые | тысячные |
| 2 | 2 | 2 | , | 3 | 4 | 5 |

Таким образом, мы разъяснили, как пишутся десятичные дроби без знаменателя. Напишем несколько таких дробей.

Чтобы написать без знаменателя дробь $\frac{5}{10}$, нужно принять во внимание, что у неё нет целых и, значит, место целых должно быть занято нулём, т. е. $\frac{5}{10} = 0{,}5$.

Дробь $2\frac{9}{100}$ без знаменателя напишется так: 2,09, т. е. на месте десятых нужно поставить нуль. Если бы мы пропустили этот 0, то получили бы совсем другую дробь, а именно 2,9, т. е. две целых и девять десятых.

Значит, при написании десятичных дробей нужно обозначать нулём недостающие целые и дробные разряды:

0,325 — нет целых,
0,012 — нет целых и нет десятых,
1,208 — нет сотых,
0,20406 — нет целых, нет сотых и нет десятитысячных.

Цифры, стоящие правее запятой, принято называть **десятичными знаками.**

Чтобы не допустить ошибки при написании десятичных дробей, нужно помнить, что после запятой в изображении десятичной дроби должно быть столько цифр, сколько будет нулей в знаменателе, если бы эту дробь мы написали со знаменателем, т. е. $0{,}1 = \frac{1}{10}$ (в знаменателе один нуль и после запятой одна цифра);

$$2{,}32 = 2\frac{32}{100};\quad 4{,}567 = 4\frac{567}{1000};\ 8{,}9879 = 8\frac{9879}{10000}.$$

## § 104. Приписывание нулей к десятичной дроби.

В предыдущем параграфе было рассказано, как изображаются десятичные дроби без знаменателей. Большое значение при написании десятичных дробей имеет нуль. Всякая п р а в и л ь н а я десятичная дробь имеет н у л ь на месте целых для обозначения того, что целые у такой дроби отсутствуют. Мы напишем сейчас несколько различных десятичных дробей с помощью цифр: 0, 3 и 5.

0,35 — 0 целых, 35 сотых,
0,035 — 0 целых, 35 тысячных,
0,305 — 0 целых, 305 тысячных,
0,0035 — 0 целых, 35 десятитысячных.

Выясним теперь, какое значение имеют н у л и, поставленные в конце десятичной дроби, т. е. с п р а в а.

Если мы возьмём целое число, например 5, поставим после него запятую, а затем после запятой напишем нуль, то этот нуль будет обозначать нуль десятых. Следовательно, этот приписанный справа нуль на величину числа не повлияет, т. е.

$$5 = 5{,}0.$$

Возьмём теперь число 6,1 и припишем к нему справа нуль, получим 6,10, т. е. у нас после запятой была $\frac{1}{10}$, а стало $\frac{10}{100}$, но $\frac{10}{100}$ равны $\frac{1}{10}$. Значит, величина числа не изменилась, а от приписывания справа нуля изменился только вид числа и произношение (6,1 — шесть целых одна десятая; 6,10 — шесть целых десять сотых).

Подобными рассуждениями мы можем убедиться в том, что приписывание справа нулей к десятичной дроби не изменяет её величины. Следовательно, можно написать такие равенства:

$$1 = 1{,}0,$$
$$2{,}3 = 2{,}300,$$
$$6{,}7 = 6{,}70000 \text{ и т. д.}$$

Если же мы припишем нули *слева* от десятичной дроби, то они не будут иметь никакого значения. В самом деле, если слева от числа 4,6 мы напишем нуль, то число примет вид 04,6. На каком месте стоит нуль? Он стоит на месте десятков, т. е. показывает, что в этом числе нет десятков, но это ясно и без нуля.

Следует, однако, запомнить, что иногда к десятичным дробям приписываются *справа* нули. Например, имеется четыре дроби: 0,32; 2,5; 13,1023; 5,238. Приписываем справа нули к тем дробям, у которых меньше десятичных знаков после запятой: 0,3200; 2,5000; 13,1023; 5,2380.

Для чего это сделано? Приписывая справа нули, мы получили у каждого числа после запятой четыре цифры, значит, у каждой дроби знаменатель будет 10 000, а до приписывания нулей у первой дроби знаменатель был 100, у второй 10, у третьей 10 000 и у четвёртой 1 000. Таким образом, приписыванием нулей мы уравняли число десятичных знаков наших дробей, т. е. *привели их к общему знаменателю*. Следовательно, приведение десятичных дробей к общему знаменателю осуществляется посредством приписывания нулей к этим дробям.

С другой стороны, если у какой-нибудь десятичной дроби имеются справа нули, то мы можем их отбросить, не изменяя её величины, например: 2,60 = 2,6; 3,150 = 3,15; 4,200 = 4,2.

Как нужно понимать такое отбрасывание нулей справа от десятичной дроби? Оно равносильно её сокращению, и это видно, если мы данные десятичные дроби запишем с знаменателем:

$$2\frac{60}{100} = 2\frac{6}{10}; \quad 3\frac{150}{1000} = 3\frac{15}{100}; \quad 4\frac{200}{1000} = 4\frac{2}{10}.$$

## § 105. Сравнение десятичных дробей по величине.

При употреблении десятичных дробей очень важно уметь сравнивать между собой дроби и отвечать на вопрос, какие из них равны, какие больше и какие меньше. Сравнение десятичных дробей выполняется иначе, чем сравнение целых чисел. Например, целое двузначное число всегда больше однозначного, сколько бы единиц ни было в однозначном числе; трёхзначное число больше двузначного и тем более однозначного. Но при сравнении десятичных дробей было бы ошибочно подсчитывать все знаки, при помощи которых написаны дроби.

Возьмём две дроби: 3,5 и 2,5, и сравним их по величине. Десятичные знаки у них одинаковые, но у первой дроби 3 целых, а у второй 2. Первая дробь больше второй, т. е.

$$3{,}5 > 2{,}5.$$

Возьмём иные дроби: 0,4 и 0,38. Для сравнения этих дробей полезно приписать справа к первой дроби нуль. Тогда мы будем сравнивать дроби 0,40 и 0,38. Каждая из них имеет после запятой две цифры: значит, у этих дробей один и тот же знаменатель 100.

Нам нужно только сравнить их числители, но числитель 40 больше 38. Значит, первая дробь больше второй, т. е.

$$0{,}4 > 0{,}38.$$

У первой дроби число десятых долей больше, чем у второй, правда, вторая дробь имеет ещё 8 сотых, но они меньше одной десятой, потому что $\frac{1}{10} = \frac{10}{100}$.

Сравним теперь такие дроби: 1,347 и 1,35. Припишем справа ко второй дроби нуль и будем сравнивать десятичные дроби: 1,347 и 1,350. Целые части у них одинаковы, значит, нужно сравнить только дробные части: 0,347 и 0,350. Знаменатель у этих дробей общий, но числитель второй дроби больше числителя первой, значит, вторая дробь больше первой, т. е. $1{,}35 > 1{,}347$.

Сравним, наконец, ещё две дроби: 0,625 и 0,62473. Припишем к первой дроби два нуля, чтобы уравнялись разряды, и сравним полученные дроби: 0,62500 и 0,62473. Знаменатели у них одинаковы, но числитель первой дроби 62 500 больше числителя второй дроби 62 473. Следовательно, первая дробь больше второй, т. е. 0,625 > 0,62473.

На основании изложенного мы можем сделать такой вывод: **из двух десятичных дробей та больше, у которой число целых больше; при равенстве целых та дробь больше, у которой число десятых больше; при равенстве целых и десятых та дробь больше, у которой число сотых больше, и т. д.**

## § 106. Увеличение и уменьшение десятичной дроби в 10, в 100, в 1 000 и т. д. раз.

Мы уже знаем, что приписывание нулей к десятичной дроби не влияет на её величину. Когда же мы изучали целые числа, то видели, что всякий приписанный справа нуль увеличивал число в 10 раз. Нетрудно понять, почему это происходило. Если мы возьмём целое число, например 25, и припишем к нему справа нуль, то число увеличится в 10 раз, число 250 в 10 раз больше 25. Когда справа появился нуль, то число 5, которое раньше обозначало единицы, теперь стало обозначать десятки, а число 2, которое раньше обозначало десятки, теперь стало обозначать сотни. Значит, благодаря появлению нуля, прежние разряды заменились новыми, они укрупнились, они передвинулись на одно место влево.

Когда нужно увеличить десятичную дробь, например, в 10 раз, то мы тоже должны передвинуть разряды на одно место влево, но такое передвижение не может быть достигнуто при помощи нуля. Десятичная дробь состоит из целой и дробной частей и границей между ними служит запятая. Слева от запятой стоит наинизший целый разряд, справа — наивысший дробный. Рассмотрим дробь:

$$1234,5678.$$

Как нам передвинуть в ней разряды, хотя бы на одно место, т. е., другими словами, как нам увеличить её в 10 раз? Если мы передвинем запятую на одно место вправо, то прежде всего это отразится на судьбе пятёрки: она из области дробных чисел попадает в область целых. Число тогда примет вид: 12345,678. Изменение произошло и со всеми другими цифрами, а не только с пятёркой. Все входящие в число цифры стали играть новую роль, произошло следующее (см. таблицу):

| Тысячи | Сотни | Десятки | Единицы | , | Десятые | Сотые | Тысячные | Десятитысячные |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | , | 5 | 6 | 7 | 8 |

| Десятки тысяч | Тысячи | Сотни | Десятки | Единицы | , | Десятые | Сотые | Тысячные |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | , | 6 | 7 | 8 |

Все разряды изменили своё наименование, и все разрядные единицы, так сказать, повысились на одно место. От этого всё число увеличилось в 10 раз. Таким образом, **перенесение запятой на один знак вправо увеличивает число в 10 раз.**

Рассмотрим ещё примеры: 1) Возьмём дробь 0,5 и перенесём запятую на о д н о место вправо; получим число 5, которое в 10 раз больше 0,5, потому что раньше пятёрка обозначала десятые доли единицы, а теперь она обозначает целые единицы.

2) Перенесём в числе 1,234 запятую на д в а знака вправо; число примет вид 123,4. Это число в 100 раз больше прежнего потому что в нём цифра 3 стала обозначать единицы, цифра 2 — десятки, а цифра 1 — сотни.

Таким образом, **чтобы увеличить десятичную дробь в 10 раз, нужно перенести запятую в ней на один знак вправо; чтобы увеличить её в 100 раз, нужно перенести запятую на два знака вправо; чтобы увеличить в 1 000 раз — на три знака вправо, и т. д.**

Если при этом не хватает знаков у числа, то приписывают к нему справа нули. Например, увеличим дробь 1,5 в 100 раз, перенеся запятую на два знака; получим 150. Увеличим дробь 0,6 в 1 000 раз; получим 600.

О б р а т н о, если требуется у м е н ь ш и т ь десятичную дробь в 10, в 100, в 1 000 и т. д. раз, то нужно перенести в ней запятую влево на один, два, три и т. д. знака. Пусть дана дробь 20,5; уменьшим её в 10 раз; для этого перенесём запятую на один знак влево, дробь примет вид 2,05. Уменьшим дробь 0,015 в 100 раз; получим 0,00015. Уменьшим число 334 в 10 раз; получим 33,4.

Глава пятнадцатая.

# Действия над десятичными дробями.

## § 107. Сложение десятичных дробей.

Сложение десятичных дробей выполняется так же, как и сложение целых чисел. Убедимся в этом на примерах.

1) $0{,}132 + 2{,}354$.

$$\begin{array}{r} 0{,}132 \\ +\,2{,}354 \\ \hline 2{,}486 \end{array}$$

Подпишем слагаемые одно под другим. Здесь от сложения 2 тысячных с 4 тысячными получилось 6 тысячных; от сложения 3 сотых с 5 сотыми получилось 8 сотых; от сложения 1 десятой с 3 десятыми —4 десятых и от сложения 0 целых с 2 целыми — 2 целых.

2) $5{,}065 + 7{,}83$.

$$\begin{array}{r} 5{,}065\phantom{0} \\ +\,7{,}83\phantom{00} \\ \hline 12{,}895\phantom{0} \end{array}$$

Во втором слагаемом нет тысячных долей, поэтому важно не допускать ошибки при подписывании слагаемых друг под другом.

3) $1{,}2357 + 0{,}469 + 2{,}08 + 3{,}90701$.

$$\begin{array}{l} \phantom{+\,}1{,}2357 \\ \phantom{+\,}0{,}469 \\ +\,2{,}08 \\ \phantom{+\,}3{,}90701 \\ \hline \phantom{+\,}7{,}69171 \end{array}$$

Здесь при сложении тысячных долей получилась 21 тысячная; мы написали 1 под тысячными, а 2 прибавили к сотым, таким образом, в разряде сотых у нас получились следующие слагаемые: $2+3+6+8+0$; в сумме они дают 19 сотых, мы подписали 9 под сотыми, а 1 присчитали к десятым и т. д.

Таким образом, при сложении десятичных дробей надо соблюдать следующий порядок: дроби подписывать одна под другой так, чтобы во всех слагаемых одинаковые разряды находились друг под другом и все запятые стояли в одном и том же вертикальном столбце; справа от десятичных знаков некоторых слагаемых приписывают, хотя бы мысленно, такое число нулей, чтобы все слагаемые после запятой имели одинаковое число цифр. Затем выполняют сложение по разрядам, начиная с правой стороны, и в полученной сумме ставят запятую в том же самом вертикальном столбце, в каком она находится в данных слагаемых.

## § 108. Вычитание десятичных дробей.

Вычитание десятичных дробей выполняется так же, как и вычитание целых чисел. Покажем это на примерах.

1) $9{,}87 - 7{,}32$.

Подпишем вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы единицы одного разряда находились друг под другом:

$$\begin{array}{r} 9{,}87 \\ -\,7{,}32 \\ \hline 2{,}55 \end{array}$$

2) 16,29 — 4,75.

Подпишем вычитаемое под уменьшаемым, как в первом примере:

$$\begin{array}{r} \_\,16{,}29 \\ 4{,}75 \\ \hline 11{,}54 \end{array}$$

Чтобы сделать вычитание десятых, надо было занять одну целую единицу от 6 и раздробить её в десятые доли.

3) 14,0213 — 5,350712.

Подпишем вычитаемое под уменьшаемым:

$$\begin{array}{r} 2\,9\,10 \\ \_\,14{,}021\,300 \\ 5{,}350\,712 \\ \hline 8{,}670\,588 \end{array}$$

Вычитание было выполнено следующим образом: так как мы не можем вычесть 2 миллионных из 0, то следует обратиться к ближайшему разряду, стоящему слева, т. е. к стотысячным, но на месте стотысячных тоже стоит нуль, поэтому берём из 3 десятитысячных 1 десятитысячную и раздробляем её в стотысячные, получаем 10 стотысячных, из них 9 стотысячных оставляем в разряде стотысячных, а 1 стотысячную раздробляем в миллионные, получаем 10 миллионных. Таким образом, в трёх последних разрядах у нас получилось: миллионных 10, стотысячных 9, десятитысячных 2. Эти числа для большей ясности и удобства (чтобы не позабыть) записаны сверху над соответствующими дробными разрядами уменьшаемого. Теперь можно приступить к вычитанию. Из 10 миллионных вычитаем 2 миллионных, получаем 8 миллионных; из 9 стотысячных вычитаем 1 стотысячную, получаем 8 стотысячных и т. д.

Таким образом, при вычитании десятичных дробей соблюдается следующий порядок: подписывают вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы одинаковые разряды находились друг под другом и все запятые стояли в одном и том же вертикальном столбце; справа приписывают, хотя бы мысленно, в уменьшаемом или вычитаемом столько нулей, чтобы они имели одинаковое число цифр, затем выполняют вычитание по разрядам, начиная с правой стороны, и в полученной разности ставят запятую в том же самом вертикальном столбце, в каком она находится в уменьшаемом и вычитаемом.

## § 109. Умножение десятичных дробей.

Рассмотрим несколько примеров умножения десятичных дробей.

1) $28 \times 2{,}3$.

Чтобы найти произведение этих чисел, мы можем рассуждать следующим образом: если множитель увеличить в 10 раз, то оба сомножителя будут целыми числами и мы можем их тогда перемножить по правилам умножения целых чисел. Но мы знаем, что при увеличении одного из сомножителей в несколько раз произведение увеличивается во столько же раз. Значит, число, которое получится от умножения целых сомножителей, т. е. 28 на 23, в 10 раз *больше* истинного произведения, а чтобы получить *истинное* произведение, нужно найденное произведение *уменьшить* в 10 раз. Следовательно, здесь придётся выполнить один раз умножение на 10 и один раз деление на 10, но умножение и деление на 10 выполняется путём перенесения запятой вправо и влево на один знак. Поэтому нужно поступить так: во множителе перенести запятую вправо на один знак, от этого он будет равен 23, затем нужно перемножить полученные целые числа:

$$\begin{array}{r} \times\ 28 \\ 23 \\ \hline 84 \\ +\,56\phantom{0} \\ \hline 644 \end{array}$$

Это произведение в 10 раз больше истинного. Следовательно, его надо уменьшить в 10 раз, для чего перенесём запятую на один знак влево. Таким образом, получим $28 \times 2{,}3 = 64{,}4$.

В целях проверки можно десятичную дробь написать со знаменателем и выполнить действие по правилу умножения обыкновенных дробей, т. е.

$$28 \cdot 2{,}3 = 28 \cdot 2\frac{3}{10} = \frac{28 \cdot 23}{10} = \frac{644}{10} = 64{,}4.$$

2) $12{,}27 \cdot 0{,}021$.

Отличие этого примера от предыдущего состоит в том, что здесь оба сомножителя представлены десятичными дробями. Но мы и здесь в процессе умножения не будем обращать внимания на запятые, т. е. временно увеличим множимое в 100 раз, а множитель в 1 000 раз, отчего произведение увеличится в 100 000 раз. Таким образом, умножая 1 227 на 21, получим:

$$1\,227 \cdot 21 = 25\,767.$$

Принимая во внимание, что полученное произведение в 100 000 раз больше истинного, мы должны теперь уменьшить его в 100 000 раз путём надлежащей постановки в нём запятой, тогда получим:

$$12{,}27 \cdot 0{,}021 = 0{,}25767.$$

Проверим:

$$12{,}27 \cdot 0{,}021 = 12\frac{27}{100} \cdot \frac{21}{1000} = \frac{1227}{100} \cdot \frac{21}{1000} = \frac{25767}{100000} = 0{,}25767.$$

Таким образом, **чтобы перемножить две десятичные дроби, достаточно, не обращая внимания на запятые, перемножить их как целые числа и в произведении отделить запятой с правой стороны столько десятичных знаков, сколько их было во множимом и во множителе вместе.**

В последнем примере получилось произведение с пятью десятичными знаками. Если такая большая точность не требуется, то делается округление десятичной дроби. При округлении следует пользоваться тем правилом, какое было указано для целых чисел на странице 13.

## § 110. Умножение при помощи таблиц.

Умножение десятичных дробей можно иногда выполнять при помощи таблиц. Для этой цели можно, например, воспользоваться теми таблицами умножения двузначных чисел, описание которых было дано раньше (стр. 37 и 38).

1) Умножим 53 на 1,5.

Будем перемножать 53 на 15. В таблице это произведение равно 795. Мы нашли произведение 53 на 15, но у нас второй множитель был в 10 раз меньше, значит, и произведение нужно уменьшить в 10 раз, т. е.

$$53 \cdot 1,5 = 79,5.$$

2) Умножим 5,3 на 4,7.

Сначала найдём в таблице произведение 53 на 47, это будет 2 491. Но так как мы увеличили множимое и множитель в общей сложности в 100 раз, то и полученное произведение в 100 раз больше, чем следует; поэтому мы должны уменьшить это произведение в 100 раз:

$$5,3 \cdot 4,7 = 24,91.$$

3) Умножим 0,53 на 7,4.

Сначала найдём в таблице произведение 53 на 74; это будет 3 922. Но так как мы увеличили множимое в 100 раз, а множитель в 10 раз, то произведение увеличилось в 1 000 раз; поэтому мы теперь должны его уменьшить в 1 000 раз:

$$0,53 \cdot 7,4 = 3,922.$$

## § 111. Деление десятичных дробей.

Деление десятичных дробей мы рассмотрим в таком порядке:

1. Деление десятичной дроби на целое число.
2. Деление десятичной дроби на десятичную дробь.

**1. Деление десятичной дроби на целое число.**

1) Разделим 2,46 на 2.

$$2{,}46 : 2 = 1{,}23.$$

Мы разделили на 2 сначала целые, потом десятые доли и, наконец, сотые доли.

2) Разделим 32,46 на 3.

$$32{,}46 : 3 = 10{,}82.$$

Мы разделили 3 десятка на 3, затем стали делить 2 единицы на 3; так как число единиц делимого (2) меньше делителя (3), то пришлось в частном поставить 0; далее, к остатку мы снесли 4 десятых и разделили 24 десятых на 3; получили в частном 8 десятых и, наконец, разделили 6 сотых.

3) Разделим 1,2345 на 5.

$$1{,}2345 : 5 = 0{,}2469.$$

Здесь в частном на первом месте получился нуль целых, так как одна целая не делится на 5.

4) Разделим 13,58 на 4.

```
_13,58| 4
 12   |3,395
 _15
  12
  _38
   36
   _20
    20
     0
```

Особенность этого примера заключается в том, что когда мы получили в частном 9 сотых, то обнаружился остаток, равный 2 сотым, мы раздробили этот остаток в тысячные доли, получили 20 тысячных и довели деление до конца.

П р а в и л о. **Деление десятичной дроби на целое число выполняется так же, как и деление целых чисел, причём получающиеся остатки обращают в десятичные доли, всё более и более мелкие; деление продолжают до тех пор, пока в остатке не получится нуль.**

**2. Деление десятичной дроби на десятичную дробь.**

1) Разделим 2,46 на 0,2.

Мы уже умеем делить десятичную дробь на целое число. Подумаем, нельзя ли и этот новый случай деления свести к предыдущему? В своё время мы рассматривали замечательное свойство частного, состоящее в том, что оно остаётся без изменения при одновременном увеличении или уменьшении делимого и делителя в одинаковое число раз. Мы без труда выполнили бы деление предложенных нам чисел, если бы делитель был целым числом. Для этого достаточно увеличить его в 10 раз, а для получения правильного частного необходимо во столько же раз, т. е. в 10 раз, увеличить и делимое. Тогда деление данных чисел заменится делением таких чисел:

$$24{,}6 : 2,$$

причём никаких поправок в частном делать уже не придётся. Выполним это деление:

$$24{,}6 : 2 = 12{,}3.$$

Значит, $2{,}46 : 0{,}2 = 12{,}3$.

2) Разделим 1,25 на 1,6.

```
_12,5  |16
 112    0,78125
 _130
  128
   _20
    16
    _40
     32
     _80
      80
       0
```

Увеличиваем делитель (1,6) в 10 раз; чтобы частное не изменилось, увеличиваем в 10 раз и делимое; 12 целых не делится на 16, поэтому пишем в частном 0 и делим 125 десятых на 16, получаем в частном 7 десятых и в остатке 13. Раздробляем 13 десятых в сотые путём приписывания нуля и делим 130 сотых на 16 и т. д.

Обращаем внимание на следующее:

а) когда в частном не получается целых, то на их месте пишется нуль целых;

б) когда после снесения к остатку цифры делимого получается число, которое не делится на делитель, то в частном пишется нуль;

в) когда после снесения последней цифры делимого деление не оканчивается, то, приписывая к остаткам нули, продолжают деление;

г) если делимое — целое число, то при делении его на десятичную дробь увеличение его осуществляется посредством приписывания к нему нулей.

Таким образом, **чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно отбросить в делителе запятую, а затем увеличить делимое во столько раз, во сколько увеличился делитель при отбрасывании в нём запятой, после чего выполнить деление по правилу деления десятичной дроби на целое число.**

## § 112. Приближённое частное.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели деление десятичных дробей, причём во всех решённых нами примерах деление доводилось до конца, т. е. получалось **точное частное.** Однако в большинстве случаев точное частное не может быть получено, как бы далеко мы ни продолжали деление. Вот один из таких случаев: разделим 53 на 101.

```
 53  | 101
 530  0,5247
-505
  250
 -202
   480
  -404
    760
   -707
     53
```

Мы уже получили пять цифр в частном, а деление ещё не окончилось и нет надежды, что оно когда-либо окончится, так как в остатках у нас начинают появляться цифры, которые встречались уже ранее. В частном также будут повторяться числа: очевидно, что вслед за цифрой 7 появится цифра 5, затем 2 и т. д. без конца. В таких случаях прерывают деление и ограничиваются несколькими первыми цифрами частного. Такое частное называется **приближённым.** Как при этом нужно выполнять деление, мы покажем на примерах.

Пусть требуется 25 разделить на 3. Очевидно, что точного частного, выраженного целым числом или десятичной дробью, от такого деления получиться не может. Поэтому мы будем искать приближённое частное:

$$25 : 3 = 8 \text{ и остаток } 1.$$

Приближённое частное равно 8; оно, конечно, меньше точного частного, потому что имеется остаток 1. Чтобы получить точное частное, нужно к найденному приближённому частному, т. е. к 8, прибавить дробь, которая получится от деления остатка, равного 1, на 3; это будет дробь $\frac{1}{3}$. Значит, точное частное выразится смешанным числом $8\frac{1}{3}$. Так как $\frac{1}{3}$ представляет собой правильную дробь, т. е. дробь, *меньшую единицы*, то, отбрасывая её, мы допустим *погрешность*, которая *меньше единицы*. Частное 8 будет **приближённым частным с точностью до единицы с недостатком.** Если мы вместо 8 возьмём в частном 9, то тоже допустим погрешность, которая меньше единицы, так как мы прибавим не целую единицу, а $\frac{2}{3}$. Такое частное будет **приближённым частным с точностью до единицы с избытком.**

Возьмём теперь другой пример. Пусть требуется 27 разделить на 8. Так как и здесь не получится точного частного, выраженного целым числом, то мы будем искать приближённое частное:

$$27 : 8 = 3 \quad \text{и остаток } 3.$$

Здесь погрешность равна $\frac{3}{8}$, она меньше единицы, значит, приближённое частное (3) найдено с точностью до единицы с недостатком. Продолжим деление: раздробим остаток 3 в десятые доли, получим 30 десятых; разделим их на 8.

$$\begin{array}{r|l} -27 & 8 \\ \underline{24} & \overline{3{,}3} \\ -30 & \\ \underline{24} & \\ 6 & \end{array}$$

Мы получили в частном на месте десятых 3 и в остатке 6 десятых. Если мы в частном ограничимся числом 3,3, а остаток 6 отбросим, то мы допустим погрешность, меньшую одной десятой. Почему? Потому что точное частное получилось бы тогда, когда мы прибавили бы к 3,3 ещё результат деления 6 десятых на 8; от этого деления получилось бы $\frac{6}{80}$, что составляет меньше одной десятой. (Проверьте!) Таким образом, если в частном мы ограничимся десятыми долями, то можно будет сказать, что мы нашли частное **с точностью до одной десятой** (с недостатком).

Продолжим деление, чтобы найти ещё один десятичный знак. Для этого раздробим 6 десятых в сотые доли и получим 60 сотых; разделим их на 8.

$$\begin{array}{r|l} -27 & 8 \\ \underline{24} & \overline{3{,}37} \\ -30 & \\ \underline{24} & \\ -60 & \\ \underline{56} & \\ 4 & \end{array}$$

В частном на третьем месте получилось 7 и в остатке 4 сотых; если мы их отбросим, то допустим погрешность, меньшую одной сотой, потому что 4 сотых, делённые на 8, составляют меньше одной сотой. В таких случаях говорят, что частное найдено **с точностью до одной сотой** (с недостатком).

В примере, который мы сейчас рассматриваем, можно получить точное частное, выраженное десятичной дробью. Для этого достаточно последний остаток, 4 сотых, раздробить в тысячные и выполнить деление на 8.

Однако в огромном большинстве случаев получить точное частное невозможно и приходится ограничиваться его приближёнными значениями. Такой пример мы сейчас и рассмотрим:

$$40 : 7 = 5{,}71428571\ldots$$

Точки, поставленные в конце числа, обозначают, что деление не закончено, т. е. равенство приближённое. Обычно приближённое равенство записывают так:

$$40 : 7 \approx 5{,}71428571.$$

Мы взяли частное с восемью десятичными знаками. Но если такая большая точность не требуется, можно ограничиться лишь целой частью частного, т. е. числом 5 (точнее 6); для большей точности можно было бы учесть десятые доли и взять частное равным 5,7; если и эта точность почему-либо недостаточна, то можно остановиться на сотых и взять 5,71, и т. д. Выпишем отдельные частные и назовём их.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Первое приближённое частное с точностью до единицы | | | | | 6. |
| Второе | » | » | » | до одной десятой | 5,7. |
| Третье | » | » | » | до одной сотой | 5,71. |
| Четвёртое | » | » | » | до одной тысячной | 5,714. |

Таким образом, чтобы найти приближённое частное с точностью до какого-нибудь, например, 3-го десятичного знака (т. е. до одной тысячной), прекращают деление, как только находят этот знак. При этом нужно помнить правило, изложенное на странице 46.

## § 113. Простейшие задачи на проценты.

После изучения десятичных дробей мы решим ещё несколько задач на проценты.

Эти задачи подобны тем, какие мы решали в отделе обыкновенных дробей; но теперь сотые доли мы будем записывать в форме десятичных дробей, т. е. без явно обозначенного знаменателя.

Прежде всего нужно уметь легко переходить от обыкновенной дроби к десятичной со знаменателем 100. Для этого надо числитель разделить на знаменатель:

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,50, \quad \frac{1}{4} = 0,25, \quad \frac{1}{7} \approx 0,14,$$

$$\frac{1}{3} \approx 0,33, \quad \frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{2}{7} \approx 0,29,$$

$$\frac{2}{3} \approx 0,67, \quad \frac{5}{6} \approx 0,83, \quad \frac{3}{7} \approx 0,43.$$

В приводимой ниже таблице показано, каким образом число со значком % (процент) заменяется десятичной дробью со знаменателем 100:

$$1\% = 0,01, \qquad 10\% = 0,10,$$
$$2\% = 0,02, \qquad 12\% = 0,12,$$
$$5\% = 0,05, \qquad 20\% = 0,20,$$
$$8\% = 0,08, \qquad 25\% = 0,25.$$

Рассмотрим теперь несколько задач.

**1. Нахождение процентов данного числа.** З а д а ч а 1. В одном селе проживает всего 1 600 человек. Число детей школьного возраста составляет 25% от общего числа жителей. Сколько детей школьного возраста в этом селе?

В этой задаче нужно найти 25%, или 0,25, от 1 600. Задача решается умножением:

$$1\,600 \cdot 0,25 = 400 \text{ (детей)}.$$

Следовательно, 25% от 1 600 составляют 400.

Для ясного понимания этой задачи полезно напомнить, что на каждую сотню населения приходится 25 детей школьного возраста. Следовательно, чтобы найти число всех детей школьного возраста, можно сначала узнать, сколько сотен в числе 1 600 (16), а затем 25 умножить на число сотен ($25 \times 16 = 400$). Этим путём можно проверить справедливость решения.

З а д а ч а 2. Сберегательные кассы дают вкладчикам ежегодно 2% дохода. Сколько дохода за год получит вкладчик, положивший в кассу: а) 200 руб.? б) 500 руб.? в) 750 руб.? г) 1 000 руб.?

Во всех четырёх случаях для решения задачи нужно будет вычислить 0,02 от указанных сумм, т. е. каждое из данных чисел придётся умножить на 0,02. Сделаем это:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\ \ 200 \cdot 0{,}02 = 4\ \text{(руб.)},\\
&\text{б)}\ \ 500 \cdot 0{,}02 = 10\ \text{(руб.)},\\
&\text{в)}\ \ 750 \cdot 0{,}02 = 15\ \text{(руб.)},\\
&\text{г)}\ 1\,000 \cdot 0{,}02 = 20\ \text{(руб.)}.
\end{aligned}$$

Каждый из этих случаев может быть проверен следующими соображениями. Сберегательные кассы дают вкладчикам 2% дохода, т. е. 0,02 от положенной на сбережение суммы. Если бы сумма равнялась 100 руб., то 0,02 от неё составляли бы 2 руб. Значит, каждая сотня приносит вкладчику 2 руб. дохода. Поэтому в каждом из рассмотренных случаев достаточно сообразить, сколько в данном числе сотен, и на это число сотен умножать 2 руб. В примере а) сотен 2, значит,

$$2 \cdot 2 = 4\ \text{(руб.)}.$$

В примере г) сотен 10, значит,

$$2 \cdot 10 = 20\ \text{(руб.)}.$$

**2. Нахождение числа по его процентам.** З а д а ч а 1. Весной школа выпустила 54 ученика, что составляет 6% от общего числа учащихся. Сколько всего учащихся было в школе в истекшем учебном году?

Уясним сначала смысл этой задачи. Школа выпустила 54 ученика, что составляет 6% от общего числа обучавшихся, или, иными словами, 6 сотых (0,06) от всех учеников школы. Значит, нам известна ч а с т ь учащихся, выраженная числом (54) и дробью (0,06), а по этой дроби мы должны найти в с ё ч и с л о. Таким образом, перед нами обыкновенная задача на нахождение числа по его дроби (стр. 118). Задачи такого типа решаются делением:

$$54 : 0{,}06 = 900.$$

Значит, в школе всего было 900 учащихся.

Такие задачи полезно проверять решением обратной задачи, т. е. после решения задачи следует, хотя бы в уме, решить задачу первого типа (нахождение процентов данного числа): принять найденное число (900) за данное и найти от него указанный в решённой задаче процент, а именно:

$$900 \cdot 0{,}06 = 54.$$

З а д а ч а 2. Семья расходует на питание в течение месяца 780 руб., что составляет 65% месячного заработка отца. Определить его месячный заработок.

Эта задача имеет такой же смысл, что и предыдущая. В ней даётся часть месячного заработка, выраженная в рублях (780 руб.), и указывается, что эта часть составляет 65%, или 0,65, от всего заработка. А искомым является весь заработок:

$$780 : 0{,}65 = 1\,200.$$

Следовательно, искомый заработок составляет 1200 руб.

**3. Нахождение процентного отношения чисел.** З а д а ч а 1. В школьной библиотеке всего 6 000 книг. Среди них 1 200 книг по математике. Сколько процентов математические книги составляют от числа всех книг, имеющихся в библиотеке?

Мы уже рассматривали (стр. 132) такого рода задачи и пришли к выводу, что для вычисления процентного отношения двух чисел нужно найти отношение этих чисел и умножить его на 100.

В нашей задаче нужно найти процентное отношение чисел 1 200 и 6 000.

Найдём сначала их отношение, а затем умножим его на 100:

$$\frac{1200 \cdot 100}{6000} = 20.$$

Таким образом, процентное отношение чисел 1 200 и 6 000 равно 20. Иными словами, математические книги составляют 20% от общего числа всех книг.

Для проверки решим обратную задачу: найти 20% от 6 000:

$$6\,000 \cdot 0{,}2 = 1\,200.$$

З а д а ч а 2. Завод должен получить 200 *т* угля. Уже привезли 80 *т*. Сколько процентов угля доставлено на завод?

В этой задаче спрашивается, сколько процентов одно число (80) составляет от другого (200). Отношение этих чисел будет $\frac{80}{200}$. Умножим его на 100:

$$\frac{80 \cdot 100}{200} = 40.$$

Значит, доставлено 40% угля.

Глава шестнадцатая

# Обращение обыкновенных дробей в десятичные. Периодические дроби.

## § 114. Обращение обыкновенной дроби в десятичную.

Обратить обыкновенную дробь в десятичную — это значит найти такую десятичную дробь, которая была бы равна данной обыкновенной дроби. При обращении обыкновенных дробей в десятичные мы встретимся с двумя случаями: 1) когда обыкновенные дроби могут быть обращены в десятичные **точно**; 2) когда обыкновенные дроби могут быть обращены в десятичные лишь **приближённо.** Рассмотрим эти случаи последовательно.

1. Как обратить обыкновенную несократимую дробь в десятичную, или, иными словами, как заменить обыкновенную дробь равной ей десятичной?

В случае, когда обыкновенные дроби могут быть точно обращены в десятичные, существует два способа такого обращения.

Вспомним, как заменить одну дробь другой, равной первой, или как перейти от одной дроби к другой, не изменяя величины первой. Этим мы занимались, когда приводили дроби к общему знаменателю (стр. 99). Когда мы приводим дроби к общему знаменателю, то поступаем следующим образом: находим общий знаменатель для данных дробей, вычисляем для каждой дроби дополнительный множитель и потом умножаем числитель и знаменатель каждой дроби на этот множитель.

Заметив это, возьмём несократимую дробь $\frac{3}{20}$ и попробуем обратить её в десятичную. Знаменатель данной дроби равен 20, а нужно привести её к другому знаменателю, который изображался бы единицей с нулями. Мы будем искать наименьший из знаменателей, выражающихся единицей с последующими нулями.

Первый способ обращения обыкновенной дроби в десятичную основан на разложении знаменателя на простые множители.

Необходимо узнать, на какое число следует умножить 20, чтобы произведение выразилось единицей с нулями. Чтобы это узнать, нужно сначала вспомнить, на какие простые множители разлагаются числа, изображаемые единицей с нулями. Вот эти разложения:

$$10 = 2 \cdot 5,$$
$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,$$
$$1\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5,$$
$$10\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Мы видим, что число, изображаемое единицей с нулями, разлагается только на двойки и пятёрки, а иных множителей в разложении нет. Кроме того, двойки и пятёрки входят в разложение в одинаковом числе. И, наконец, число тех и других множителей в отдельности равно числу нулей, стоящих после единицы в изображении данного числа.

Посмотрим теперь, как разлагается 20 на простые множители: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Из этого видно, что двоек в разложении числа 20 две, а пятёрок одна. Значит, если к этим множителям мы добавим одну пятёрку, то получим число, изображаемое единицей с нулями. Иными словами, для того, чтобы в знаменателе вместо числа 20 получилось число, изображаемое единицей с нулями, нужно 20 умножить на 5, а чтобы величина дроби не изменилась, нужно умножить на 5 и её числитель, т. е.

$$\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100} = 0{,}15.$$

Таким образом, **чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно знаменатель этой обыкновенной дроби разложить на простые множители и затем уравнять в нём число двоек и пятёрок, введя в него (и, конечно, в числитель) недостающие множители в необходимом числе.**

Применим этот вывод к некоторым дробям.

Обратить в десятичную дробь $\frac{3}{50}$. Знаменатель этой дроби разлагается так: $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$, значит, в нём недостаёт одной двойки. Добавим её:

$$\frac{3}{50} = \frac{3 \cdot 2}{50 \cdot 2} = \frac{6}{100} = 0{,}06.$$

Обратить в десятичную дробь $\frac{7}{40}$. Знаменатель этой дроби разлагается так: $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, т. е. в нём недостаёт двух пятёрок. Введём их в числитель и знаменатель в качестве множителей:

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{40 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{175}{1000} = 0{,}175.$$

Из того, что изложено, нетрудно сделать вывод, какие обыкновенные дроби обращаются точно в десятичные. Совершенно очевидно, что несократимая обыкновенная дробь, знаменатель которой не содержит никаких иных простых множителей, кроме 2 и 5, обращается точно в десятичную. Десятичная дробь, которая получается от обращения некоторой обыкновенной, будет иметь столько десятичных знаков, сколько раз в состав знаменателя обыкновенной дроби после её сокращения входит численно преобладающий множитель 2 или 5.

Если мы возьмём дробь $\frac{9}{40}$, то, во-первых, она обратится в десятичную, потому что в состав её знаменателя входят множители $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, во-вторых, полученная десятичная дробь будет иметь 3 десятичных знака, потому что численно преобладающий множитель 2 входит в разложение три раза. В самом деле:

$$\frac{9}{40} = \frac{9}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{225}{1000} = 0{,}225.$$

Второй способ (посредством деления числителя на знаменатель).

Пусть требуется обратить в десятичную дробь $\frac{3}{4}$. Мы знаем, что $\frac{3}{4}$ есть частное от деления 3 на 4. Это частное мы можем найти, разделив 3 на 4. Сделаем это:

$$\begin{array}{r|l} -3{,}0 & 4 \\ \cline{2-2} 28 & 0{,}75 \\ \cline{1-1} -20 & \\ 20 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ещё пример: обратить в десятичную дробь $\frac{5}{8}$.

$$\begin{array}{r|l} -5{,}0 & 8 \\ \cline{2-2} 48 & 0{,}625 \\ \cline{1-1} -20 & \\ 16 & \\ \cline{1-1} -40 & \\ 40 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{5}{8} = 0{,}625$.

Итак, **чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, достаточно разделить числитель обыкновенной дроби на её знаменатель.**

2. Рассмотрим теперь второй из указанных в начале параграфа случаев, т. е. тот случай, когда обыкновенная дробь не может быть обращена в точную десятичную.

Обыкновенная несократимая дробь, знаменатель которой содержит какие-либо простые множители, отличные от 2 и 5, не может обратиться точно в десятичную. В самом деле, например, дробь $\frac{8}{15}$ не может обратиться в десятичную, так как её знаменатель 15 разлагается на два множителя: 3 и 5.

Мы не можем исключить тройку из знаменателя и не можем подобрать такого целого числа, чтобы после умножения на него данного знаменателя произведение выразилось единицей с нулями.

В таких случаях можно говорить только о **приближённом обращении** обыкновенных дробей в десятичные.

Как это делается? Это делается посредством деления числителя обыкновенной дроби на знаменатель, т. е. в этом случае применяют второй способ обращения обыкновенной дроби в десятичную. Значит, этот способ применяется и при точном обращении и при приближённом.

**Если обыкновенная дробь обращается точно в десятичную, то от деления получается конечная десятичная дробь.**

**Если обыкновенная дробь не обращается в точную десятичную, то от деления получается бесконечная десятичная дробь.** Так как мы не можем выполнить бесконечного процесса деления, то мы должны прекратить деление на каком-нибудь десятичном знаке, т. е. сделать приближённое деление. Мы можем, например, прекратить деление на первом десятичном знаке, т. е. ограничиться десятыми долями; в случае надобности мы можем остановиться на втором десятичном знаке, получив сотые доли, и т. д. В этих случаях говорят, что мы **округляем** бесконечную десятичную дробь. Округление делается с той точностью, какая при решении данной задачи необходима.

## § 115. Понятие о периодической дроби.

Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называется **периодической** десятичной дробью. Например:

0,33333333...; 1,12121212...; 3,234234234...

Совокупность повторяющихся цифр называется **периодом** этой дроби. Период первой из написанных выше дробей есть 3, период второй дроби 12, период третьей дроби 234. Значит, период может состоять из нескольких цифр — из одной, из двух, из трёх и т. д. Первая совокупность повторяющихся цифр называется первым периодом, вторая совокупность — вторым периодом и т. д., т. е.

3,234 234 234...
1-й 2-й 3-й периоды

Периодические дроби бывают чистые и смешанные. Периодическая дробь называется **чистой**, если её период начинается тотчас после запятой. Значит, написанные выше периодические дроби будут чистыми. Напротив, периодическая дробь называется **смешанной**, если у неё между запятой и первым периодом имеется одна или несколько неповторяющихся цифр, например:

2,5333333...; 4,1232323232...; 0,2345345345345...

Для сокращения письма можно цифры периода писать один раз в скобках и не ставить после скобок многоточия, т. е. вместо 0,33... можно писать 0,(3); вместо 2,515151... можно писать 2,(51); вместо 0,2333... можно писать 0,2(3); вместо 0,8333... можно писать 0,8(3).

Читаются периодические дроби так:

0,(3) — 0 целых, 3 в периоде.

7,2(3) — 7 целых, 2 до периода, 3 в периоде.

5,00(17) — 5 целых, два нуля до периода, 17 в периоде.

Как возникают периодические дроби? Мы уже видели, что при обращении обыкновенных дробей в десятичные может быть два случая. *Во-первых*, знаменатель обыкновенной несократимой дроби не содержит никаких иных множителей, кроме 2 и 5; в этом случае обыкновенная дробь обращается в конечную десятичную. *Во-вторых*, знаменатель обыкновенной несократимой дроби содержит в себе какие-либо простые множители, *отличные* от 2 и 5; в этом случае обыкновенная дробь не обращается в конечную десятичную. В этом последнем случае при попытке обратить обыкновенную дробь в десятичную посредством деления числителя на знаменатель получается бесконечная дробь, которая всегда будет *периодической*. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим какой-нибудь пример. Попробуем обратить дробь $\frac{18}{7}$ в десятичную.

Мы, конечно, заранее знаем, что дробь с таким знаменателем не может обратиться в конечную десятичную, и ведём речь только о приближённом обращении. Разделим числитель 18 на знаменатель 7.

```
_18 |  7
 14  2,57142857
 _40
  35
  _50
   49
   _10
      7
    _30
     28
     _20
      14
      _60
       56
       _40
        35
         50
```

Мы получили в частном восемь десятичных знаков. Нет надобности продолжать деление дальше, потому что оно всё равно не окончится. Но отсюда понятно, что деление можно продолжать бесконечно долго и, таким образом, получать в частном новые цифры. Эти новые цифры будут возникать потому, что у нас всё время будут получаться остатки; но никакой остаток не может быть больше делителя, который у нас равен 7.

Посмотрим, какие у нас были остатки: 4; 5; 1; 3; 2; 6, т. е. это были числа, меньшие 7. Очевидно, их не может быть больше шести, и при дальнейшем продолжении деления они должны будут повторяться, а вслед за ними будут повторяться и цифры частного. Приведённый выше пример подтверждает эту мысль: десятичные знаки в частном идут в таком порядке: 571428, а после этого снова появились цифры 57. Значит, у нас окончился первый период и начинается второй.

Таким образом, **бесконечная десятичная дробь, получающаяся при обращении обыкновенной дроби, всегда будет периодической.** Если периодическая дробь встречается при решении какой-нибудь задачи, то она берётся с той точностью, какая требуется условием задачи (до десятой, до сотой, до тысячной и т. д.).

## § 116. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями.

При решении различных задач мы встретимся с такими случаями, когда в задачу входят и обыкновенные, и десятичные дроби. В этих случаях можно идти различными путями.

**1. Обратить все дроби в десятичные.** Это удобно потому, что вычисления над десятичными дробями легче, чем над обыкновенными. Например,

$$\left(\frac{3}{4}+0{,}5\right)\cdot\left(1\frac{1}{5}-0{,}7\right).$$

Обратим дроби $\frac{3}{4}$ и $1\frac{1}{5}$ в десятичные:

$$(0{,}75+0{,}5)\cdot(1{,}2-0{,}7)=1{,}25\cdot 0{,}5=0{,}625.$$

**2. Обратить все дроби в обыкновенные.** Так чаще всего поступают в тех случаях, когда встречаются обыкновенные дроби, не обращающиеся в конечные десятичные. Например,

$$\frac{\left(2\frac{1}{2}+0{,}75\right)\cdot\frac{4}{11}}{(45{,}5-44{,}3):0{,}2}.$$

Обратим десятичные дроби в обыкновенные:

$$\frac{\left(2\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{11}}{\left(45\frac{1}{2}-44\frac{3}{10}\right):\frac{1}{5}}=\frac{3\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{11}}{1\frac{1}{5}:\frac{1}{5}}=\frac{13\cdot 4\cdot 5\cdot 1}{4\cdot 11\cdot 6\cdot 5}=\frac{13}{66}.$$

**3. Вычисления ведут без обращения одних дробей в другие.** Это особенно удобно в тех случаях, когда в пример входят только умножение и деление. Например,

$$\frac{\frac{3}{4} \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}8}{0{,}75 \cdot 4{,}5 \cdot \frac{5}{8}}.$$

Перепишем пример так:

$$\frac{3 \cdot 25 \cdot 18 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 8}{4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 75 \cdot 45 \cdot 5} = 1{,}6.$$

4. В некоторых случаях **обращают все обыкновенные дроби в десятичные** (даже те, которые обращаются в периодические) и находят приближённый результат. Например,

$$\frac{2}{3} + 0{,}125 + 0{,}234.$$

Обратим $\frac{2}{3}$ в десятичную дробь, ограничившись тысячными долями:

$$0{,}667 + 0{,}125 + 0{,}234 = 1{,}026.$$

---

Глава семнадцатая.

# Решение задач с геометрическим содержанием.

## § 117. Длина окружности и площадь круга.

1. **Длина окружности.** Окружностью называется замкнутая плоская кривая линия, все точки которой находятся на равном расстоянии от одной точки ($O$), называемой **центром** окружности (рис. 27).

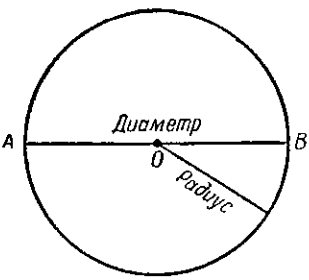

Рис. 27.

Окружность вычерчивается с помощью циркуля. Для этого острую ножку циркуля ставят в центр, а другую (с карандашом) вращают вокруг первой до тех пор, пока конец карандаша не вычертит полной окружности. Расстояние от центра до любой точки окружности называется её **радиусом.** Из определения следует, что все радиусы одной окружности равны между собой.

Отрезок прямой линии ($AB$), соединяющий две любые точки окружности и проходящий через её центр, называется **диаметром.** Все диаметры одной окружности равны между собой; диаметр равен двум радиусам.

Как найти длину окружности? Практически в некоторых случаях длину окружности можно найти путём непосредственного измерения. Это можно сделать, например, при измерении окружности сравнительно небольших предметов (ведро, стакан и т. п.). Для этого можно воспользоваться рулеткой, тесьмой или шнуром.

В математике применяется приём косвенного определения длины окружности. Он состоит в вычислении по готовой формуле, которую мы сейчас выведем.

Если мы возьмём несколько больших и малых круглых предметов (монета, стакан, ведро, бочка и т. д.) и измерим у каждого из них длину окружности и длину диаметра, то получим для каждого предмета два числа (одно, измеряющее длину окружности, и другое — длину диаметра). Естественно, что для малых предметов эти числа будут небольшими, а для крупных — большими.

Однако если мы в каждом из этих случаев возьмём о т н о ш е н и е полученных двух чисел (длины окружности и диаметра), то при тщательном выполнении измерения найдём почти одно и то же число. Обозначим длину окружности буквой $C$, длину диаметра буквой $D$, тогда отношение их будет иметь вид $C : D$. Фактические измерения всегда сопровождаются неизбежными неточностями. Но, выполнив указанный опыт и произведя необходимые вычисления, мы получим для отношения $C : D$ примерно следующие числа: 3,13; 3,14; 3,15. Эти числа очень мало отличаются одно от другого.

В математике путём теоретических соображений установлено, что искомое отношение $C : D$ никогда не меняется и оно равно бесконечной непериодической дроби, приближённое значение которой с точностью до десятитысячных долей равно 3,1416. Это значит, что всякая окружность длиннее своего диаметра в одно и то же число раз. Это число принято обозначать греческой буквой $\pi$ (пи). Тогда отношение длины окружности к диаметру запишется так: $C : D = \pi$. Мы будем ограничивать это число только сотыми долями, т. е. брать $\pi = 3{,}14$.

Напишем формулу для определения длины окружности.

Так как $C : D = \pi$, то

$$\boxed{C = \pi D}$$

т. е. **длина окружности равна произведению числа $\pi$ на диаметр.**

З а д а ч а 1. Найти длину окружности ($C$) круглой комнаты, если диаметр её $D = 5{,}5$ *м*.

Принимая во внимание изложенное выше, мы должны для решения этой задачи увеличить диаметр в 3,14 раза:

$$5{,}5 \cdot 3{,}14 = 17{,}27 \ (\text{м}).$$

З а д а ч а 2. Найти радиус колеса, у которого длина окружности 125,6 *см*.

Эта задача обратна предыдущей. Найдём диаметр колеса:

$$125{,}6 : 3{,}14 = 40\,(\textit{см}).$$

Найдём теперь радиус колеса:

$$40 : 2 = 20\ (\textit{см}).$$

**2. Площадь круга.** Чтобы определить площадь круга, можно было бы начертить на бумаге круг данного радиуса, покрыть его прозрачной клетчатой бумагой и потом сосчитать клетки, находящиеся внутри окружности (рис. 28). Но такой способ неудобен по многим причинам. Во-первых, вблизи контура круга получается ряд неполных клеток, о величине которых судить трудно. Во-вторых, нельзя покрыть листом бумаги большой предмет (круглую клумбу, бассейн, фонтан и др.). В-третьих, подсчитав клетки, мы всё-таки не получаем никакого правила, позволяющего нам решать другую подобную задачу.

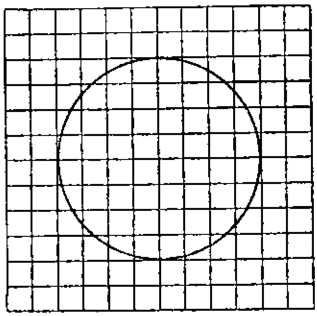

Рис. 28.

В силу этого поступим иначе. Сравним круг с какой-нибудь знакомой нам фигурой и сделаем это следующим образом: вырежем круг из бумаги, разрежем его сначала по диаметру пополам, затем каждую половину разрежем ещё пополам, каждую четверть — ещё пополам и т. д., пока не разрежем круг, например, на 32 части, имеющие форму зубцов (рис. 29). Затем сложим их так, как показано на рисунке 30, т. е. сначала расположим 16 зубцов в виде пилы, а затем в образовавшиеся отверстия вложим 15 зубцов и, наконец, последний оставшийся зубец разрежем по радиусу пополам и приложим одну часть слева, другую — справа. Тогда получится фигура, напоминающая прямоугольник. Длина этой фигуры (основание) равна приблизительно длине полуокружности, а высота — приблизительно радиусу. Тогда площадь такой фигуры можно найти путём умножения чисел, выра-

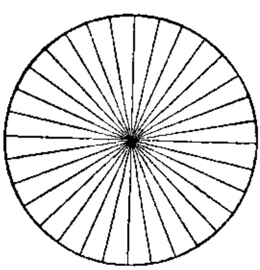

Рис. 29.

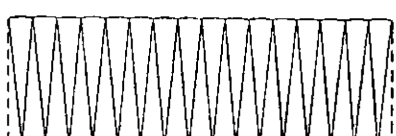

Рис. 30.

жающих длину полуокружности и длину радиуса. Если обозначим площадь круга буквой $S$, длину окружности буквой $C$, радиус буквой $r$, то можем записать формулу для определения площади круга:

$$\boxed{S = \frac{C}{2} \cdot r},$$

которая читается так: **площадь круга равна длине полуокружности, умноженной на радиус.**

З а д а ч а. Найти площадь круга, радиус которого равен 4 *см.*

Найдём сначала длину окружности, потом длину полуокружности, а затем умножим её на радиус.

1) Длина окружности $C = \pi \cdot D = 3{,}14 \cdot 8 = 25{,}12$ (*см*).

2) Длина половины окружности $\frac{C}{2} = 25{,}12 : 2 = 12{,}56$ (*см*).

3) Площадь круга $S = \frac{C}{2} \cdot r = 12{,}56 \cdot 4 = 50{,}24$ (*кв. см*).

## § 118. Поверхность и объём цилиндра.

З а д а ч а 1. Найти полную поверхность цилиндра, у которого диаметр основания 20,6 *см* и высота 30,5 *см.*

Форму цилиндра (рис. 31) имеют: ведро, стакан (не гранёный), кастрюля и множество других предметов.

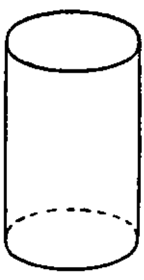

Рис. 31.

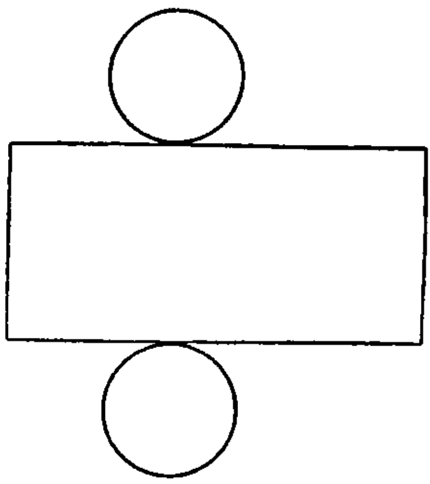

Рис. 32.

Полная поверхность цилиндра (как и полная поверхность прямоугольного параллелепипеда) состоит из боковой поверхности и площадей двух оснований (рис. 32). Чтобы наглядно представить себе, о чём идёт речь, необходимо аккуратно сделать модель цилиндра из бумаги. Если мы от этой модели отнимем два основания, т. е. два круга, а боковую поверхность разрежем вдоль и развернём, то будет совершенно ясно, как нужно вычислять полную поверхность цилиндра. Боковая поверхность развернётся в прямоугольник, основание которого равно длине окружности. Поэтому решение задачи будет иметь вид:

1) Длина окружности: $20{,}6 \cdot 3{,}14 = 64{,}684$ (*см*).

2) Площадь боковой поверхности: $64{,}684 \cdot 30{,}5 = 1972{,}862$ (*кв.см*).

3) Площадь одного основания: $32{,}342 \cdot 10{,}3 = 333{,}1226$ (*кв.см*).

4) Полная поверхность цилиндра: $1972{,}862 + 333{,}1226 + 333{,}1226 = 2639{,}1072$ (*кв. см*) $\approx 2639$ (*кв. см*).

Задача 2. Найти объём железной бочки, имеющей форму цилиндра с размерами: диаметр основания 60 *см* и высота 110 *см*.

Чтобы вычислить объём цилиндра, нужно припомнить, как мы вычисляли объём прямоугольного параллелепипеда (полезно прочитать § 61).

Единицей измерения объёма у нас будет кубический сантиметр. Сначала надо узнать, сколько кубических сантиметров можно расположить на площади основания, а затем найденное число умножить на высоту.

Чтобы узнать, сколько кубических сантиметров можно уложить на площади основания, надо вычислить площадь основания цилиндра. Так как основанием служит круг, то нужно найти площадь круга. Затем для определения объёма умножить её на высоту. Решение задачи имеет вид:

1) Длина окружности: $60 \cdot 3{,}14 = 188{,}4$ (*см*).

2) Площадь круга: $94{,}2 \cdot 30 = 2826$ (*кв. см*).

3) Объём цилиндра: $2826 \cdot 110 = 310\,860$ (*куб. см*).

Ответ. Объём бочки 310,86 *куб. дм*.

Если обозначим объём цилиндра буквой $V$, площадь основания $S$, высоту цилиндра $H$, то можно написать формулу для определения объёма цилиндра:

$$\boxed{V = S \cdot H},$$

которая читается так: **объём цилиндра равен площади основания, умноженной на высоту.**

## § 119. Таблицы для вычисления длины окружности по диаметру.

При решении различных производственных задач часто приходится вычислять длину окружности. Представим себе рабочего, который изготовляет круглые детали по указанным ему диаметрам. Он должен всякий раз, зная диаметр, вычислить длину окружности. Чтобы сэкономить время и застраховать себя от ошибок, он обращается к готовым таблицам, в которых указаны диаметры и соответствующие им длины окружностей.

Приведём небольшую часть таких таблиц и расскажем, как ими пользоваться.

| $D$ | Длина окружности | $D$ | Длина окружности | $D$ | Длина окружности |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,142 | 6 | 18,850 | 11 | 34,558 |
| 2 | 6,283 | 7 | 21,991 | 12 | 37,699 |
| 3 | 9,425 | 8 | 25,133 | 13 | 40,841 |
| 4 | 12,566 | 9 | 28,274 | 14 | 43,982 |
| 5 | 15,708 | 10 | 31,416 | 15 | 47,124 |

Пусть известно, что диаметр окружности равен 5 *м*. Ищем в таблице в вертикальном столбце под буквой $D$ число 5. Это длина диаметра. Рядом с этим числом (вправо, в столбце под названием «Длина окружности») увидим число 15,708 (*м*). Совершенно так же найдём, что если $D = 10$ *см*, то длина окружности равна 31,416 *см*.

По этим же таблицам можно производить и обратные вычисления. Если известна длина окружности, то можно найти в таблице соответствующий ей диаметр. Пусть длина окружности равна приблизительно 34,56 *см*. Найдём в таблице число, наиболее близкое к данному. Таковым будет 34,558 (разница 0,002). Соответствующий такой длине окружности диаметр равен приблизительно 11 *см*.

Таблицы, о которых здесь сказано, имеются в различных справочниках. В частности, их можно найти в книжке «Четырёхзначные математические таблицы» В. М. Брадиса и в задачнике по арифметике С. А. Пономарёва и Н. И. Сырнева.

---

Глава восемнадцатая.

# Проценты.

## § 120. Нахождение процентов данного числа.

Мы уже занимались решением задач на проценты. Теперь мы рассмотрим несколько усложнённые задачи на проценты и укажем некоторые другие способы их решения. В расположении задач мы будем придерживаться прежнего порядка.

Рассмотрим задачи, в которых нужно найти несколько процентов от данного числа.

Задача 1. Цена пишущей машинки, стоившей 1 200 руб., понизилась на 8,5%. На сколько рублей подешевела машинка?

В задаче требуется найти 8,5% от 1 200. Число процентов выражено десятичной дробью. С этой дробью нужно поступать следующим образом: 1% обозначает 0,01, а половина процента (0,5%) обозначает половину от 0,01, т. е. 0,005. Следовательно, 8,5% есть не что иное, как 0,085.

Поэтому решение задачи будет иметь следующий вид:

$$1\,200 \cdot 0{,}085 = 102 \text{ (руб.)}.$$

Задача 2. Для токаря установлена норма выработки — 500 деталей в день, но он перевыполняет норму. В первый день он выполнил 105% нормы, во второй день — 107%, в третий день — 110%, в четвёртый день — 106% и в пятый день — 108%. Сколько деталей он изготовил в каждый из этих дней?

Отличие этой задачи от ранее встречавшихся заключается в том, что здесь нужно найти от числа больше, чем 100%.

Приступим к решению этой задачи. Вычислим выработку рабочего в первый день.

В задаче сказано, что в первый день он выполнил 105% нормы. Заменим 105% десятичной дробью. Это будет 1,05. Для решения нашей задачи нужно 500 умножить на 1,05:

$$500 \cdot 1{,}05 = 525.$$

Подобным же образом найдём выработку рабочего и в последующие дни:

| | | |
|---|---|---|
| во второй день: | | $500 \cdot 1{,}07 = 535$; |
| в третий | » | $500 \cdot 1{,}1 = 550$; |
| » четвёртый | » | $500 \cdot 1{,}06 = 530$; |
| » пятый | » | $500 \cdot 1{,}08 = 540$. |

Задача 3. На ремонт мебели в школе затрачено 1 200 руб. 45% этой суммы пошло на оплату труда столярам, а остальная часть — на материалы. Сколько было израсходовано на оплату труда и сколько на материалы?

Найдём сначала, сколько уплатили столярам. Из условия задачи видно, что им уплатили 45% от 1 200 руб. Вычислим 1% от 1 200 руб., разделив 1 200 на 100, а затем вычислим 45%, умножив полученное частное на 45. Результат запишем так:

$$\frac{1200 \cdot 45}{100} = 540 \text{ (руб.)}.$$

Из этой записи видно, что для нахождения нескольких процентов от числа нужно это число разделить на 100 и умножить на число процентов.

Эту мысль можно записать в виде формулы; обозначим искомое число буквой $b$, данное в задаче число — буквой $a$ и число процентов буквой $p$. Таким образом, формула примет вид:

$$b = \frac{ap}{100}.$$

Теперь нам нужно ещё найти стоимость материалов. Это можно сделать по-разному. Поступим так. Найдём сначала, сколько процентов составляет стоимость материалов от общей суммы ремонта. Так как на рабочую силу израсходовано 45%, то на материалы: 100% — 45% = 55%.

Следовательно, нам нужно найти 55% от 1 200 руб. Мы можем воспользоваться теперь формулой. В данном случае вместо $a$ подставим 1 200, а вместо $p$ число 55. Получим следующее:

$$b = \frac{1200 \cdot 55}{100} = 660 \text{ (руб.)}.$$

Таким образом, из 1 200 руб. рабочим уплатили 540 руб., а на материалы израсходовали 660 руб.

Мы решили несколько задач на вычисление процентов. Покажем, как можно решать задачи с помощью таблицы.

**Таблица для вычисления процентов.**

| Число | 2% | Число | 2% | Число | 2% | Число | 2% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,02 | 10 | 0,2 | 100 | 2 | 1000 | 20 |
| 2 | 0,04 | 20 | 0,4 | 200 | 4 | 2000 | 40 |
| 3 | 0,06 | 30 | 0,6 | 300 | 6 | 3000 | 60 |
| 4 | 0,08 | 40 | 0,8 | 400 | 8 | 4000 | 80 |
| 5 | 0,1 | 50 | 1,0 | 500 | 10 | 5000 | 100 |
| 6 | 0,12 | 60 | 1,2 | 600 | 12 | 6000 | 120 |
| 7 | 0,14 | 70 | 1,4 | 700 | 14 | 7000 | 140 |
| 8 | 0,16 | 80 | 1,6 | 800 | 16 | 8000 | 160 |
| 9 | 0,18 | 90 | 1,8 | 900 | 18 | 9000 | 180 |

Допустим, что вкладчик имеет в сберегательной кассе на книжке 8 754 руб. Кассы дают доход 2% в год. Сколько дохода получит вкладчик через год после вложения этой суммы? Нам нужно вычислить 2% с указанной суммы; поэтому в таблице мы должны смотреть на столбец, где указаны суммы, и на столбец, где написано вверху 2%. Рассуждаем так: нужно найти 2% от 8 754. По таблице находим 2% от 8 000, это будет 160, затем 2% от 700, это будет 14, далее 2% от 50, — 1 и, наконец, от 4, — 0,08. Складывая эти числа, получаем 175,08 руб.

Рекомендуем сделать вычисления и довести таблицу до 10%.

## § 121. Нахождение числа по его процентам.

Решим несколько задач на нахождение числа, если известна его часть, составляющая данное число процентов.

З а д а ч а 1. В школе на родительском собрании отсутствовало 12 человек, что составляет 7,5% от общего числа родителей. Сколько всего родителей должно было присутствовать на собрании?

Заменим 7,5% десятичной дробью. Это будет 0,075. Значит, 12 человек, отсутствовавших на собрании, составляют 0,075 от общего числа родителей. Таким образом, в этой задаче нужно найти число по данной его дроби (стр. 119). Выполним это:

$$12 : 0{,}075 = 160.$$

Следовательно, на родительском собрании должно было присутствовать 160 человек.

З а д а ч а 2. Завод должен был изготовить по месячному плану некоторое число моторов. За месяц он выполнил план на 116% и дал 1 740 моторов. Каков был месячный план?

Можно рассуждать так: план представляет собой 100%, в задаче дано 116%, что выражается числом 1 740. Вычислим сначала 1% (делением), а потом 100% (умножением):

$$1)\ 1\,740 : 116 = 15;$$
$$2)\ 15 \cdot 100 = 1500.$$

Итак, по плану надо было изготовить 1 500 моторов.

З а м е ч а н и е. Можно поставить вопрос: почему эта задача появилась среди задач на вычисление числа по его процентам? Мы привыкли среди подобных задач встречать такие, в которых число процентов меньше 100, например: «Завод за определённое время изготовил 900 моторов, что составляет 60% плана. Каков был план?» В этой задаче нужно найти число по его дроби, поэтому достаточно 900 разделить на 0,6, что в результате даёт нам 1 500.

Здесь дробь от числа, или «доля» числа, составляла 60%, т. е. 0,6. Во второй же задаче была дана необычная доля (116%, или 1,16), она была б о л ь ш е самого числа. Однако в математике и такая задача не считается исключением и её можно решать обычным способом, т. е.

$$1\,740 : 1{,}16 = 1\,500.$$

З а д а ч а 3. Вспомним третью задачу предыдущего параграфа. В ней была дана общая сумма ремонта (1 200 руб.) и число процентов, израсходованных из этой суммы на оплату труда (45%), а ставился вопрос, сколько денег было израсходовано на оплату труда и на материалы.

Теперь представим себе обратную задачу. Пусть нам известно, что на оплату труда израсходовано 540 руб. и что это составляет 45% от общей суммы ремонта. Поставим вопрос: во что обошёлся ремонт мебели?

Задача требует, зная 45% числа, найти 100% его, т. е. всё число. Поступим так: найдём сначала 1% (путём деления данного числа на 45), а потом найдём 100% (умножением):

$$\frac{540 \cdot 100}{45} = 1\,200 \text{ (руб.)}.$$

Из этой записи видно, что для нахождения всего числа по нескольким данным его процентам нужно число, соответствующее нескольким процентам, разделить на число процентов и умножить на 100.

Эту мысль можно записать в виде формулы. Для этого обозначим искомое число буквой $a$, данное в задаче число, соответствующее нескольким процентам, — буквой $b$, а число процентов — буквой $p$. Тогда формула примет вид:

$$a = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

Воспользуемся этой формулой для того, чтобы, зная стоимость материалов (660 руб.) и соответствующее ей число процентов (55%), найти снова всю сумму денег, затраченных на ремонт:

$$a = \frac{660 \cdot 100}{55} = \frac{60 \cdot 20}{1} = 1\,200 \text{ (руб.)}.$$

## § 122. Нахождение процентного отношения чисел.

Рассмотрим задачи на нахождение процентного отношения чисел.

З а д а ч а 1. На собрании присутствовали 200 человек. За предложенную резолюцию голосовали 151 человек. Сколько процентов участников собрания голосовало за резолюцию?

В задаче требуется найти, сколько процентов составляет число 151 от 200. Мы уже решали подобные задачи (стр. 132 и 156) и установили, что в этом случае нужно первое число разделить на второе и полученное частное умножить на 100, т. е.

$$\frac{151 \cdot 100}{200} = \frac{151}{2} = 75{,}5.$$

О т в е т. За резолюцию голосовало 75,5%.

З а д а ч а 2. По плану рабочий должен был изготовить 800 деталей, а изготовил 996 деталей. Сколько процентов плана он выполнил?

Из условия задачи видно, что рабочий перевыполнил свой план, т. е. он выполнил больше 100% плана. Решить эту задачу можно таким же способом, как и предыдущую, т. е.

$$\frac{996 \cdot 100}{800} = \frac{996}{8} = 124{,}5.$$

Ответ. Рабочий выполнил 124,5% плана.

Задача 3. На 10 *кг* муки получилось 4,5 *кг* припёка. Сколько процентов составляет припёк от данного количества муки?

Попробуем составить формулу для решения этой задачи. Припомним указание, сделанное к первой задаче. Там было сказано, что для решения подобных задач нужно разделить одно из чисел на другое (взять их отношение) и полученное частное умножить на 100. Обозначим одно из чисел буквой $a$, другое — буквой $A$, число процентов — буквой $p$. Тогда формула примет вид:

$$p = \frac{a \cdot 100}{A}.$$

Применим её к решению нашей задачи, подставив в неё вместо букв числа из задачи:

$$p = \frac{4{,}5 \cdot 100}{10} = 4{,}5 \cdot 10 = 45.$$

Ответ. Припёк составляет 45%.

## § 123. Таблицы процентных отношений.

Процентное отношение, как видно из предыдущего параграфа, иногда выражается не целым, а дробным числом.

Пример. Найти процентное отношение числа 19 к числу 70:

$$\frac{19 \cdot 100}{70} = \frac{1900}{70} \approx 27{,}14\ (\%).$$

Здесь при делении получается периодическая дробь с периодом из 6 цифр. Мы не стали выписывать весь этот период, а ограничили вычисление сотыми долями.

Задачи на нахождение процентного отношения чисел широко распространены. Когда мы даём проценты выполнения плана, успеваемости учащихся, прироста населения, роста заработной платы, увеличения посевных площадей и т. д., то мы решаем задачи на нахождение процентного отношения двух чисел. Для облегчения вычислений и экономии времени составлены таблицы процентных отношений. Такие таблицы занимают несколько страниц, но, чтобы дать о них представление, мы покажем здесь лишь маленькую частичку их.

| | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 100,00 | 98,39 | 96,83 | 95,31 | 93,85 | 92,42 | 91,04 | 89,71 | 88,41 | 87,14 |
| 62 | | 100,00 | 98,41 | 96,88 | 95,39 | 93,94 | 92,54 | 91,18 | 89,86 | 88,57 |
| 63 | | | 100,00 | 98,44 | 96,92 | 95,45 | 94,03 | 92,65 | 91,30 | 90,00 |
| 64 | | | | 100,00 | 98,46 | 96,37 | 95,52 | 94,12 | 92,75 | 91,43 |
| 65 | | | | | 100,00 | 98,48 | 97,01 | 95,59 | 93,20 | 92,86 |
| 66 | | | | | | 100,00 | 98,51 | 97,06 | 95,65 | 94,29 |
| 67 | | | | | | | 100,00 | 98,53 | 97,10 | 95,71 |
| 68 | | | | | | | | 100,00 | 98,55 | 97,14 |
| 69 | | | | | | | | | 100,00 | 98,57 |
| 70 | | | | | | | | | | 100,00 |

В этой части таблицы можно найти процентные отношения чисел от 61 до 70 к числам, равным им или бо́льшим их. Здесь можно найти процентные отношения 61 к 65, к 67 и т. д., процентные отношения 64 к 66, к 68 и т. д.

Найдём, например, чему равно процентное отношение 62 к 64. В первом столбце в третьей строке найдём число 62; на пересечении этой строки и столбца с числом 64 найдём процентное отношение 62 : 64. Оно равно 96,88. Проверим вычислением это отношение:

$$\frac{62 \cdot 100}{64} = \frac{31 \cdot 25}{8} = 96,875 \approx 96,88.$$

Вычисленное нами число почти совпадает с табличным.

Воспользуемся теперь нашей таблицей для решения задачи: «Для отопления дома требуется заготовить 70 *т* угля. На 1 октября подвезли 65 *т*. Сколько процентов топлива доставлено?»

Решение задачи должно состоять в нахождении процентного отношения доставленного топлива к общему количеству, которое нужно заготовить, т. е. числа 65 к числу 70.

Это отношение мы можем найти в таблице, оно равно 92,86%.

## § 124. Диаграммы.

В пятой главе были показаны образцы простейших диаграмм. Рассмотрим ещё некоторые диаграммы. Здесь данные для построения диаграмм будут выражены в процентах.

З а д а ч а 1. В десятиклассной школе 300 учащихся. В I классе учится 15% всех учащихся, во II классе тоже 15%, в III классе 14%, в IV классе тоже 14%, в V классе 12%, в VI классе 8%, в VII классе 6%, в VIII классе 6%, в IX классе 5% и в X классе тоже 5%.

Построить линейную диаграмму состава учащихся по классам и вычислить, сколько учеников в каждом классе.

Диаграмма будет иметь вид, указанный на рисунке 33.

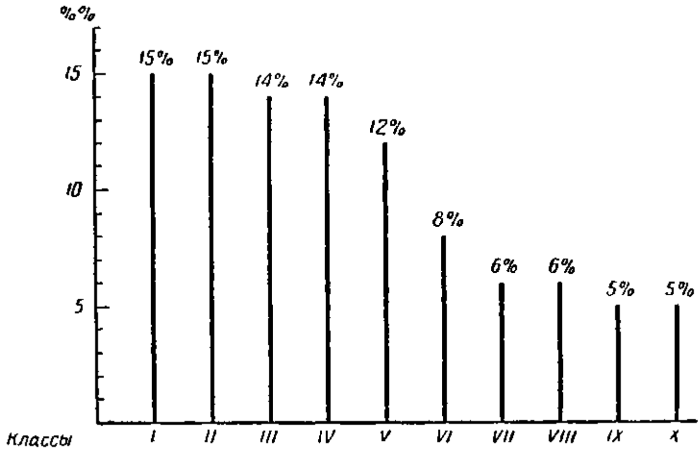


Рис. 33.

Число учеников в каждом классе вычислите сами.

З а д а ч а 2. Сельскохозяйственное учебное заведение имеет опытный участок. 30% его занято зерновыми культурами, 25% — плодовыми деревьями, 15% — ягодными растениями, 20% — овощами и 10% — прочими культурами. Построить диаграмму распределения различных культур.

Начертим две диаграммы. Первая будет столбчатая (рис. 34). Ширина всех столбиков одинаковая, и она не принимается во внимание. Нужно рассматривать только высоту столбиков.

Вторая диаграмма (рис. 35) построена иначе. Она представляет собой квадрат, разделённый на 100 квадратиков. Каждый квадратик соответствует одному проценту. Тогда 30 квадратиков представляют 30%, 25 квадратиков — 25%, 15 квадратиков — 15%, 20 квадратиков — 20% и 10 квадратиков — 10%.

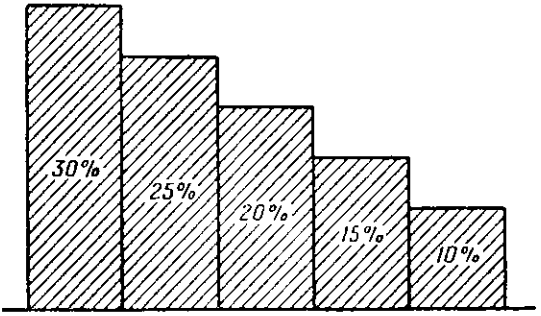


Рис. 34.

Задача 3. Клубу выдали 10 000 руб. Эти средства были израсходованы следующим образом: на пополнение библиотеки 25%, на лекционную работу 40%, на радиофикацию 8%, на инвентарь 12% и на оборудование сцены 15%.

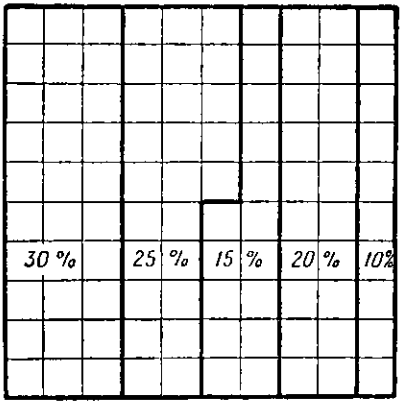


Рис. 35.

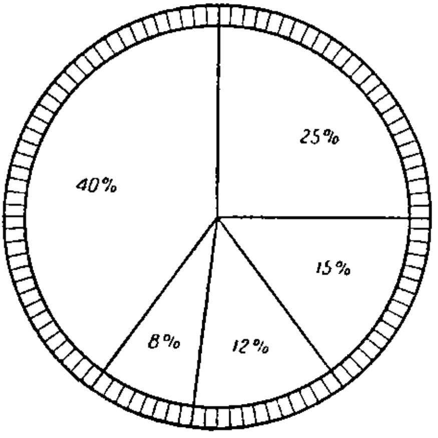


Рис. 36.

Изобразим эти данные с помощью секторной диаграммы. Под секторной диаграммой разумеется чертёж, на котором каждому данному числу соответствует сектор, т. е. часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой.

Для построения таких диаграмм удобно пользоваться «процентным транспортиром». Он представляет собой круг, разделённый по окружности на 100 равных частей (рис. 36).

Чтобы построить диаграмму с помощью процентного транспортира, ставят на бумаге точку и из неё проводят вправо прямую. Затем накладывают процентный транспортир на бумагу так, чтобы его центр совпадал с отмеченной точкой, а начальный радиус (идущий из центра к нулю) совпадал с прямой. Чтобы отложить 25%, ставим на бумаге точку против того места, где на транспортире стоит число 25, и к этой точке из центра проводим радиус. После этого можно было бы повернуть транспортир против движения часовой стрелки, совместить начальный радиус с отрезком, проведённым к 25%, и потом отложить 40%; но можно такого поворота и не делать, а поступить иначе. Отложив 25%, найти сумму 25% + + 40% = 65%, поставить точку на 65-м делении транспортира и соединить центр с этой точкой. Подобным образом проводятся и остальные отрезки.

Сколько денег пришлось на каждое мероприятие, вычислите сами.

*Часть четвёртая.*

# Пропорции и пропорциональность величин.

Глава девятнадцатая.

## Пропорции.

### § 125. Понятие о пропорции.

**Пропорцией называется равенство двух отношений.** Вот примеры равенств, называемых пропорциями:

1) $2 : 1 = 10 : 5$;

2) $2\,000 : 20 = 500 : 5$;

3) $0{,}5 : 2 = 0{,}75 : 3$;

4) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{8} : \frac{1}{4}$.

Примечание. Наименования величин в пропорциях не указаны.

Пропорции принято читать следующим образом: 2 так относится к 1 (единице), как 10 относится к 5 (первая пропорция). Можно читать иначе, например: 2 во столько раз больше 1, во сколько раз 10 больше 5. Третью пропорцию можно прочесть так: 0,5 во столько раз меньше 2, во сколько раз 0,75 меньше 3.

Числа, входящие в пропорцию, называются **членами пропорции.** Значит, пропорция состоит из четырёх членов. Первый и последний члены, т. е. члены, стоящие по краям, называются **крайними,** а члены пропорции, находящиеся в середине, называются **средними** членами. Значит, в первой пропорции числа 2 и 5 будут крайними членами, а числа 1 и 10 — средними членами пропорции.

### § 126. Основное свойство пропорции.

Рассмотрим пропорцию:

$$6 : 3 = 8 : 4.$$

Перемножим отдельно её крайние и средние члены. Произведение крайних $6 \cdot 4 = 24$, произведение средних $3 \cdot 8 = 24$.

Рассмотрим другую пропорцию: $10 : 5 = 12 : 6$.

Перемножим и здесь отдельно крайние и средние члены.

Произведение крайних $10 \cdot 6 = 60$, произведение средних $5 \cdot 12 = 60$.

Основное свойство пропорции: **произведение крайних членов пропорции равно произведению средних её членов.**

В общем виде основное свойство пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ записывается так: $ad = bc$.

Проверим его на нескольких пропорциях:

1) $12 : 4 = 30 : 10$.

Пропорция эта верна, так как равны отношения, из которых она составлена. Вместе с тем, взяв произведение крайних членов пропорции ($12 \cdot 10$) и произведение средних её членов ($4 \cdot 30$), мы увидим, что они равны между собой, т. е.

$$12 \cdot 10 = 4 \cdot 30.$$

2) $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}$.

Пропорция верна, в чём легко убедиться, упростив первое и второе отношения. Основное свойство пропорции примет вид:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{48} \cdot 20.$$

Нетрудно убедиться в том, что если мы напишем такое равенство, у которого в левой части стоит произведение двух каких-нибудь чисел, а в правой части произведение двух других чисел, то из этих четырёх чисел можно составить пропорцию.

Пусть у нас имеется равенство, в которое входят четыре числа, попарно перемноженные:

$$10 \cdot 7 = 2 \cdot 35,$$

эти четыре числа могут быть членами пропорции, которую нетрудно написать, если принять первое произведение за произведение крайних членов, а второе — за произведение средних. Из данного равенства можно составить, например, такую пропорцию:

$$10 : 2 = 35 : 7.$$

Вообще, из равенства $ad = bc$ можно получить следующие пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ и } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Проделайте самостоятельно следующее упражнение. Имея произведение двух пар чисел, напишите пропорцию, соответствующую каждому равенству:

а) $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$;

б) $2 \cdot 15 = 6 \cdot 5$.

## § 127. Вычисление неизвестных членов пропорции.

Основное свойство пропорции позволяет вычислить любой из членов пропорции, если он неизвестен. Возьмём пропорцию:

$$x : 4 = 15 : 3.$$

В этой пропорции неизвестен один крайний член. Мы знаем, что во всякой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов. На этом основании мы можем написать:

$$x \cdot 3 = 4 \cdot 15.$$

После умножения 4 на 15 мы можем переписать это равенство так:

$$x \cdot 3 = 60.$$

Рассмотрим это равенство. В нём первый сомножитель неизвестен, второй сомножитель известен и произведение известно. Мы знаем, что для нахождения неизвестного сомножителя достаточно произведение разделить на другой (известный) сомножитель. Тогда получится:

$$x = 60 : 3, \text{ или } x = 20.$$

Проверим найденный результат подстановкой числа 20 вместо $x$ в данную пропорцию:

$$20 : 4 = 15 : 3.$$

Пропорция верна.

Подумаем, какие действия нам пришлось выполнить для вычисления неизвестного крайнего члена пропорции. Из четырёх членов пропорции нам был неизвестен только один крайний; два средних и второй крайний были известны. Для нахождения крайнего члена пропорции мы сначала перемножили средние члены (4 и 15), а затем найденное произведение разделили на известный крайний член. Сейчас мы покажем, что действия не изменились бы, если бы искомый крайний член пропорции стоял не на первом месте, а на последнем. Возьмём пропорцию:

$$70 : 10 = 21 : x.$$

Запишем основное свойство пропорции:

$$70 \cdot x = 10 \cdot 21.$$

Перемножив числа 10 и 21, перепишем равенство в таком виде:

$$70 \cdot x = 210.$$

Здесь неизвестен один сомножитель, для его вычисления достаточно произведение (210) разделить на другой сомножитель (70), т. е.

$$x = 210 : 70; \quad x = 3.$$

Таким образом, мы можем сказать, что **каждый крайний член пропорции равен произведению средних, делённому на другой крайний.**

Перейдём теперь к вычислению неизвестного среднего члена. Возьмём пропорцию:

$$30 : x = 27 : 9.$$

Напишем основное свойство пропорции:

$$30 \cdot 9 = x \cdot 27.$$

Вычислим произведение 30 на 9 и переставим части последнего равенства:

$$x \cdot 27 = 270.$$

Найдём неизвестный сомножитель:

$$x = 270 : 27, \text{ или } x = 10.$$

Проверим подстановкой:

$$30 : 10 = 27 : 9.$$

Пропорция верна.

Возьмём ещё одну пропорцию:

$$12 : 6 = x : 8.$$

Напишем основное свойство пропорции:

$$12 \cdot 8 = 6 \cdot x.$$

Перемножая 12 и 8 и переставляя части равенства, получим:

$$6 \cdot x = 96.$$

Находим неизвестный сомножитель:

$$x = 96 : 6, \text{ или } x = 16.$$

Таким образом, **каждый средний член пропорции равен произведению крайних, делённому на другой средний.**

Найдите неизвестные члены следующих пропорций:

$$1)\ a:3=10:5;\qquad 3)\ 2:\frac{1}{2}=x:5;$$

$$2)\ 8:b=16:4;\qquad 4)\ 4:\frac{1}{3}=24:x.$$

Два последних правила в общем виде можно записать так:

1) Если пропорция имеет вид:

$$x:a=b:c,$$

то

$$x=\frac{ab}{c}.$$

2) Если пропорция имеет вид:

$$a:x=b:c,$$

то

$$x=\frac{ac}{b}.$$

## § 128. Упрощение пропорции и перестановка её членов.

В настоящем параграфе мы выведем правила, позволяющие упрощать пропорцию в том случае, когда в неё входят большие числа или дробные члены. К числу преобразований, не нарушающих пропорцию, относятся следующие:

1. Одновременное увеличение или уменьшение обоих членов любого отношения в одинаковое число раз.

Пример. $40:10=60:15$.

Увеличив в 3 раза оба члена первого отношения, получим:

$$120:30=60:15.$$

Пропорция не нарушилась.

Уменьшив в 5 раз оба члена второго отношения, получим:

$$40:10=12:3.$$

Получили опять правильную пропорцию.

2. Одновременное увеличение или уменьшение обоих предыдущих или обоих последующих членов в одинаковое число раз.

Пример. $16:8=40:20$.

Увеличим в 2 раза предыдущие члены обоих отношений:

$$32:8=80:20.$$

Получили правильную пропорцию.

Уменьшим в 4 раза последующие члены обоих отношений:

$$16:2=40:5.$$

Пропорция не нарушилась.

Два полученных вывода можно кратко высказать так:

**Пропорция не нарушится, если мы одновременно увеличим или уменьшим в одинаковое число раз любой крайний член пропорции и любой средний.**

Например, уменьшив в 4 раза 1-й крайний и 2-й средний члены пропорции $16:8 = 40:20$, получим:

$$4:8 = 10:20.$$

3. Одновременное увеличение или уменьшение всех членов пропорции в одинаковое число раз.

Пример. $36:12 = 60:20$.

Увеличим все четыре числа в 2 раза:

$$72:24 = 120:40.$$

Пропорция не нарушилась.

Уменьшим все четыре числа в 4 раза:

$$9:3 = 15:5.$$

Пропорция верна.

Перечисленные преобразования дают возможность, во-первых, упрощать пропорции, а во-вторых, освобождать их от дробных членов. Приведём примеры.

1) Пусть имеется пропорция:

$$200:25 = 56:x.$$

В ней членами первого отношения являются сравнительно большие числа, и если бы мы пожелали найти значение $x$, то нам пришлось бы выполнять вычисления над этими числами; но мы знаем, что пропорция не нарушится, если оба члена отношения разделить на одно и то же число. Разделим каждый из них на 25. Пропорция примет вид:

$$8:1 = 56:x.$$

Мы получили, таким образом, более удобную пропорцию, из которой $x$ можно найти в уме:

$$x = \frac{56 \cdot 1}{8} = 7.$$

2) Возьмём пропорцию:

$$2 : \frac{1}{2} = 20 : 5.$$

В этой пропорции есть дробный член $\left(\frac{1}{2}\right)$, от которого можно освободиться. Для этого придётся умножить этот член, например, на 2. Но один средний член пропорции мы не имеем права увеличивать; нужно вместе с ним увеличить какой-нибудь из крайних членов; тогда пропорция не нарушится (на основании первых двух пунктов). Увеличим первый из крайних членов

$$(2 \cdot 2) : \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 20 : 5, \text{ или } 4 : 1 = 20 : 5.$$

Увеличим второй крайний член:

$$2 : \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 20 : (2 \cdot 5), \text{ или } 2 : 1 = 20 : 10.$$

Рассмотрим ещё три примера на освобождение пропорции от дробных членов.

Пример 1. $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = 20 : 30.$

Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2}{8} : \frac{3}{8} = 20 : 30.$$

Умножив на 8 оба члена первого отношения, получим:

$$2 : 3 = 20 : 30.$$

Пример 2. $12 : \frac{15}{14} = 16 : \frac{10}{7}.$

Приведём дроби к общему знаменателю:

$$12 : \frac{15}{14} = 16 : \frac{20}{14}.$$

Умножим оба последующих члена на 14, получим:

$$12:15 = 16:20.$$

Пример 3. $\frac{1}{2} : \frac{1}{48} = 20 : \frac{5}{6}.$

Умножим все члены пропорции на 48:

$$24:1 = 960:40.$$

При решении задач, в которых встречаются какие-нибудь пропорции, часто приходится для разных целей *переставлять* члены пропорции. Рассмотрим, какие перестановки являются законными, т. е. не нарушающими пропорции. Возьмём пропорцию:

$$3:5 = 12:20. \qquad (1)$$

Переставив в ней крайние члены, получим:

$$20:5 = 12:3. \qquad (2)$$

Переставим теперь средние члены:

$$3:12 = 5:20. \qquad (3)$$

Переставим одновременно и крайние, и средние члены:

$$20:12 = 5:3. \qquad (4)$$

Все эти пропорции верны. Теперь поставим первое отношение на место второго, а второе — на место первого. Получится пропорция:

$$12:20 = 3:5. \qquad (5)$$

В этой пропорции мы сделаем те же перестановки, какие делали раньше, т. е. переставим сначала крайние члены, затем средние и, наконец, одновременно и крайние, и средние. Получатся ещё три пропорции, которые тоже будут справедливыми:

$$5 : 20 = 3 : 12. \qquad (6)$$

$$12 : 3 = 20 : 5. \qquad (7)$$

$$5 : 3 = 20 : 12. \qquad (8)$$

Итак, из одной данной пропорции путём перестановки можно получить ещё 7 пропорций, что вместе с данной составляет 8 пропорций.

Особенно легко обнаруживается справедливость всех этих пропорций при буквенной записи. Полученные выше 8 пропорций принимают вид:

$$\begin{array}{ll} a : b = c : d; & c : d = a : b; \\ d : b = c : a; & b : d = a : c; \\ a : c = b : d; & c : a = d : b; \\ d : c = b : a; & b : a = d : c. \end{array}$$

Легко видеть, что в каждой из этих пропорций основное свойство принимает вид:

$$ad = bc.$$

Таким образом, указанные перестановки не нарушают справедливости пропорции и ими можно пользоваться в случае надобности.

---

## Глава двадцатая.

# Пропорциональные величины.

### § 129. Предварительные разъяснения.

Человек постоянно имеет дело с самыми разнообразными величинами. Служащий и рабочий стараются к определённому **времени** попасть на службу, на работу, пешеход спешит дойти до известного места кратчайшим **путём**, истопник парового отопления беспокоится о том, что **температура** в котле медленно поднимается, хозяйственник строит планы снижения **стоимости** продукции и т. д.

Таких примеров можно было бы привести сколько угодно. Время, расстояние, температура, стоимость — всё это разнообразные величины. В первой и во второй частях настоящей книги мы ознакомились с некоторыми особенно часто встречающимися величинами: **площадью, объёмом, весом.** Со многими величинами мы встречаемся при изучении физики и других наук.

Представьте себе, что вы едете в поезде. Время от времени вы смотрите на часы и замечаете, как долго вы уже находитесь в пути. Вы говорите, например, что со времени отправления вашего поезда прошло 2, 3, 5, 10, 15 часов и т. д. Эти числа обозначают различные промежутки времени; они называются **значениями** этой величины (времени). Или вы смотрите в окно и следите по дорожным столбам за расстоянием, которое проходит ваш поезд. Перед вами мелькают числа 110, 111, 112, 113, 114 *км*. Эти числа обозначают различные расстояния, которые прошёл поезд от места отправления. Они тоже называются значениями, на этот раз другой величины (пути или расстояния между двумя пунктами). Таким образом, одна величина, например время, расстояние, температура, может принимать сколько угодно различных значений.

Обратите внимание на то, что человек почти никогда не рассматривает только одну величину, а всегда связывает её с какими-нибудь другими величинами. Ему приходится одновременно иметь дело с двумя, тремя и бóльшим числом величин. Представьте себе, что вам нужно к 9 часам попасть в школу. Вы смотрите на часы и видите, что в вашем распоряжении 20 минут. Тогда вы быстро соображаете, стоит ли вам садиться в трамвай или вы успеете дойти до школы пешком. Подумав, вы решаете идти пешком. Заметьте, что в то время, когда вы думали, вы решали некоторую задачу. Эта задача стала простой и привычной, так как вы решаете такие задачи каждый день. В ней вы быстро сопоставили несколько величин. Именно вы посмотрели на часы, значит, учли время, затем вы мысленно представили себе расстояние от вашего дома до школы; наконец, вы сравнили две величины: скорость вашего шага и скорость трамвая, и сделали вывод, что за данное время (20 мин.) вы успеете дойти пешком. Из этого простого примера вы видите, что в нашей практике некоторые величины связаны между собой, т. е. зависят друг от друга.

В главе двенадцатой было рассказано об отношении однородных величин. Например, если один отрезок равен 12 *м*, а другой 4 *м*, то отношение этих отрезков будет 12 : 4.

Мы говорили, что это есть отношение двух однородных величин. Можно сказать иначе, что это есть отношение двух чисел одного наименования.

Теперь, когда мы больше познакомились с величинами и ввели понятие **значения величины**, можно по-новому высказать определение отношения. В самом деле, когда мы рассматривали два отрезка 12 *м* и 4 *м*, то мы говорили об одной величине — длине, а 12 *м* и 4 *м* — это были только два разных значения этой величины.

Поэтому в дальнейшем, когда мы станем говорить об отношении, то будем рассматривать при этом два значения одной какой-нибудь величины, а **отношением одного значения величины к другому значению той же величины будем называть частное от деления первого значения на второе.**

## § 130. Величины прямо пропорциональные.

Рассмотрим задачу, в условие которой входят две величины: **расстояние** и **время.**

Задача 1. Тело, движущееся прямолинейно и равномерно, проходит в каждую секунду 12 *см*. Определить путь, пройденный телом в 2, 3, 4, ..., 10 секунд.

Составим таблицу, по которой можно было бы следить за изменением времени и расстояния.

| Время (сек.) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Расстояние (*м*) | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 |

Таблица даёт нам возможность сопоставить эти два ряда значений. Мы видим из неё, что когда значения первой величины (времени) постепенно увеличиваются в 2, 3, ..., 10 раз, то и значения второй величины (расстояния) тоже увеличиваются в 2, 3, ..., 10 раз. Таким образом, при увеличении значений одной величины в несколько раз значения другой величины увеличиваются во столько же раз, а при уменьшении значений одной величины в несколько раз значения другой величины уменьшаются во столько же раз.

Рассмотрим теперь задачу в которую входят две такие величины: **количество** материи и **стоимость** её.

З а д а ч а 2. 15 *м* ткани стоят 120 руб. Вычислить стоимость этой ткани для нескольких других количеств метров, указанных в таблице.

| Количество (*м*) | 1 | 2 | 5 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 18 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Стоимость (руб.) | 8 | 16 | 40 | 64 | 80 | 96 | 112 | 120 | 128 | 144 | 160 |

По этой таблице мы можем проследить, каким образом постепенно возрастает стоимость товара в зависимости от увеличения его количества. Несмотря на то что в этой задаче фигурируют совсем другие величины (в первой задаче — время и расстояние, а здесь — количество товара и его стоимость), тем не менее в поведении этих величин можно обнаружить большое сходство.

В самом деле, в верхней строке таблицы идут числа, обозначающие число метров ткани, под каждым из них написано число, выражающее стоимость соответствующего количества товара. Даже при беглом взгляде на эту таблицу видно, что числа и в верхнем и в нижнем ряду в о з р а с т а ю т; при более же внимательном рассмотрении таблицы и при сравнении отдельных столбцов обнаруживается, что во всех случаях значения второй величины возрастают во столько же раз, во сколько возрастают значения первой, т. е. если значение первой величины возросло, положим, в 10 раз, то и значение второй величины увеличилось тоже в 10 раз.

Если мы станем просматривать таблицу с п р а в а  н а л е в о, то обнаружим, что указанные значения величин будут у м е н ь ш а т ь с я в одинаковое число раз. В этом смысле между первой задачей и второй имеется безусловное сходство.

Пары величин, с которыми мы встретились в первой и второй задачах, называются **прямо пропорциональными.**

Таким образом, **если две величины связаны между собой так, что с увеличением (уменьшением) значения одной из них в несколько раз значение другой увеличивается (уменьшается) во столько же раз, то такие величины называются прямо пропорциональными.**

О таких величинах говорят также, что они связаны между собой прямо пропорциональной зависимостью.

В природе и в окружающей нас жизни встречается множество подобных величин. Приведём примеры:

1. **Время** работы (день, два дня, три дня и т. д.) и **заработок,** полученный за это время при подённой оплате труда.

2. **Объём** какого-нибудь предмета, сделанного из однородного материала, и **вес** этого предмета.

## § 131. Свойство прямо пропорциональных величин

Возьмём задачу, в которую входят следующие две величины: рабочее время и заработок. Если ежедневный заработок 20 руб., то заработок за 2 дня будет 40 руб., и т. д. Удобнее всего составить таблицу, в которой определённому числу дней будет соответствовать определённый заработок.

| Рабочее время (дни) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Заработок (руб.) | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 |

Рассматривая эту таблицу, мы видим, что обе величины приняли 10 различных значений. Каждому значению первой величины *соответствует* определённое значение второй величины, например 2 дням соответствуют 40 руб.; 5 дням соответствуют 100 руб. В таблице эти числа написаны одно под другим.

Мы уже знаем, что если две величины прямо пропорциональны, то каждая из них в процессе своего изменения увеличивается во столько же раз, во сколько раз увеличивается и другая. Отсюда сразу следует: если мы возьмём отношение каких-нибудь двух значений первой величины, то оно будет равно отношению двух соответствующих значений второй величины. В самом деле:

$$6:2 = 3;$$
$$120:40 = 3.$$

Почему это происходит? А потому, что эти величины прямо пропорциональны, т. е. когда одна из них (время) увеличилась в 3 раза, то и другая (заработок) увеличилась в 3 раза.

Мы пришли, следовательно, к такому выводу: если взять два каких-нибудь значения первой величины и разделить их одно на другое, а потом разделить одно на другое соответствующие им значения второй величины, то в обоих случаях получится одно и то же число, т. е. одно и то же отношение. Значит, два отношения, которые мы выше написали, можно соединить знаком равенства, т. е.

$$6:2 = 120:40.$$

Нет сомнения в том, что если бы мы взяли не эти отношения, а другие и не в том порядке, а в обратном, то также получили бы равенство отношений. В самом деле, будем рассматривать значения наших величин слева направо и возьмём третьи и девятые значения:

$$3:9 = \frac{1}{3}, \qquad 60:180 = \frac{1}{3}.$$

Значит, мы можем написать:

$$3:9 = 60:180.$$

Отсюда вытекает такой вывод: **если две величины прямо пропорциональны, то отношение двух произвольно взятых значений первой величины равно отношению двух соответствующих значений второй величины.**

## § 132. Формула прямой пропорциональности.

Составим таблицу стоимости различных количеств конфет, если 1 *кг* их стоит 10,4 руб.

| Вес (*кг*) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Стоимость (руб.) | 10,4 | 20,8 | 31,2 | 41,6 | 52 | 62,4 | 72,8 | 83,2 | 93,6 | 104 |

Теперь поступим таким образом. Возьмём любое число второй строки и разделим его на с о о т в е т с т в у ю щ е е число первой строки. Например:

$$10{,}4:1 = 10{,}4;$$
$$20{,}8:2 = 10{,}4;$$
$$31{,}2:3 = 10{,}4.$$

Вы видите, что в частном всё время получается одно и то же число. Следовательно, **для данной пары прямо пропорциональных величин частное от деления любого значения одной величины на соответствующее значение другой величины есть число постоянное** (т. е. не изменяющееся). В нашем примере это частное равно 10,4. Это постоянное число называется **коэффициентом пропорциональности.** В данном случае оно выражает цену е д и н и ц ы измерения, т. е. одного килограмма товара.

Как найти или вычислить коэффициент пропорциональности? Чтобы это сделать, нужно взять любое значение одной величины и разделить его на соответствующее значение другой.

Обозначим это произвольное значение одной величины буквой $y$, а соответствующее значение другой величины — буквой $x$; тогда коэффициент пропорциональности (обозначим его $K$) найдём посредством деления:

$$\frac{y}{x} = K.$$

В этом равенстве $y$ — делимое, $x$ — делитель и $K$ — частное, а так как по свойству деления делимое равно делителю, умноженному на частное, то можно написать:

$$\boxed{y = Kx}.$$

Полученное равенство называется **формулой прямой пропорциональности.** Пользуясь этой формулой, мы можем вычислить сколько угодно значений одной из прямо пропорциональных величин, если знаем соответствующие значения другой величины и коэффициент пропорциональности.

Пример. Из физики мы знаем, что вес $P$ какого-либо тела равен его удельному весу $d$, умноженному на объём этого тела $V$, т. е. $P = dV$.

Возьмём пять железных болванок различного объёма; зная удельный вес железа (7,8), можем вычислить веса этих болванок по формуле:

$$P = 7{,}8 \cdot V.$$

Сравнивая эту формулу с формулой $y = Kx$, видим, что $y = P$, $x = V$, а коэффициент пропорциональности $K = 7{,}8$. Формула та же, только буквы другие.

Пользуясь этой формулой, составим таблицу: пусть объём 1-й болванки равен 8 *куб. см*, тогда вес её равен $7{,}8 \cdot 8 = 62{,}4$ (*г*). Объём 2-й болванки 27 *куб. см*. Её вес равен $7{,}8 \cdot 27 = 210{,}6$ (*г*). Таблица будет иметь такой вид:

| Объём (*куб. см*) | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 |
|---|---|---|---|---|---|
| Вес (*г*) | 62,4 | 210,6 | | | |

Вычислите сами числа, недостающие в этой таблице, пользуясь формулой $P = dV$.

## § 133. Другие способы решения задач с прямо пропорциональными величинами.

В предыдущем параграфе мы решили задачу, в условие которой входили прямо пропорциональные величины. Для этой цели мы предварительно вывели формулу прямой пропорциональности и потом эту формулу применяли. Теперь мы покажем два других способа решения подобных задач.

**1. Способ приведения к единице.** Составим задачу по числовым данным, приведённым в таблице предыдущего параграфа.

З а д а ч а. Болванка объёмом 8 *куб. см* весит 62,4 *г*. Сколько будет весить болванка объёмом 64 *куб. см*?

Р е ш е н и е. Вес железа, как известно, пропорционален его объёму. Если 8 *куб. см* весят 62,4 *г*, то 1 *куб. см* будет весить в 8 раз меньше, т. е.

$$62{,}4:8 = 7{,}8 \ (г).$$

Болванка объёмом 64 *куб. см* будет весить в 64 раза больше, чем болванка в 1 *куб. см*, т. е.

$$7{,}8 \cdot 64 = 499{,}2 (г).$$

Мы решили нашу задачу способом приведения к единице. Смысл этого названия оправдывается тем, что для её решения нам пришлось в первом вопросе найти вес е д и н и ц ы объёма.

**2. Способ пропорции.** Решим эту же задачу способом пропорции.

Так как вес железа и его объём — величины прямо пропорциональные, то отношение двух значений одной величины (объёма) равно отношению двух соответствующих значений другой величины (веса), т. е.

$$\frac{64}{8} = \frac{P}{62{,}4}$$

(буквой $P$ мы обозначили неизвестный вес болванки). Отсюда:

$$P = \frac{64 \cdot 62{,}4}{8} = 499{,}2 \ (г).$$

Задача решена способом пропорций. Это значит, что для её решения была составлена пропорция из чисел, входящих в условие.

## § 134. Величины обратно пропорциональные.

Рассмотрим следующую задачу: «Пять каменщиков могут сложить кирпичные стены дома в 168 дней. Определить, во сколько дней могли бы выполнить ту же работу 10, 8, 6 и т. д. каменщиков».

Если 5 каменщиков сложили стены дома за 168 дней, то (при одинаковой производительности труда) 10 каменщиков могли бы выполнить это вдвое скорее, так как в среднем 10 человек выполняют работу в два раза бо́льшую, чем 5 человек.

Составим таблицу, по которой можно было бы следить за изменением числа рабочих и рабочего времени.

| Число рабочих | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Рабочее время (дни) | 168 | 140 | 120 | 105 | $\approx$93 | 84 |

Например, чтобы узнать, сколько дней потребуется 6 рабочим, надо сначала вычислить, сколько дней требуется одному рабочему ($168 \times 5 = 840$), а затем — шести рабочим ($840 : 6 = 140$).

Рассматривая эту таблицу, мы видим, что обе величины приняли шесть различных значений. Каждому значению первой величины соответствует определённое значение второй величины, например 10-ти соответствует 84, числу 8 — число 105 и т. д.

Если мы будем рассматривать значения обеих величин слева направо, то увидим, что значения верхней величины возрастают, а значения нижней убывают. Возрастание и убывание подчинено следующему закону: значения числа рабочих увеличиваются во столько же раз, во сколько раз уменьшаются значения затраченного рабочего времени. Ещё проще эту мысль можно выразить так: чем больше занято в каком-либо деле рабочих, тем меньше им нужно времени для выполнения определённой работы. Две величины, с которыми мы встретились в этой задаче, называются **обратно пропорциональными.**

Таким образом, **если две величины связаны между собой так, что с увеличением (уменьшением) значения одной из них в несколько раз значение другой уменьшается (увеличивается) во столько же раз, то такие величины называются обратно пропорциональными.**

В жизни встречается много подобных величин. Приведём примеры.

1. Если на 150 руб. нужно купить несколько килограммов конфет, то количество конфет будет зависеть от цены одного килограмма. Чем выше цена, тем меньше можно купить на эти деньги товара; это видно из таблицы:

| Цена 1 *кг* (руб.) | 10 | 12,5 | 15 | 20 | 25 | 30 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вес (*кг*) | 15 | 12 | 10 | 7,5 | 6 | 5 | 3 |

С повышением в несколько раз цены конфет уменьшается во столько же раз число килограммов конфет, какое можно купить на 150 руб. В этом случае две величины (вес товара и его цена) обратно пропорциональны.

2. Если расстояние между двумя городами 1 200 *км*, то оно может быть пройдено в различное время в зависимости от скорости передвижения. Существуют разные способы передвижения: пешком, на лошади, на велосипеде, на пароходе, в автомобиле, поездом, на самолёте. Чем меньше скорость, тем больше нужно времени для передвижения. Это видно из таблицы:

| Скорость (*км* в час) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 80 | 100 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Время (час.) | 120 | 60 | 40 | 30 | 24 | 20 | 15 | 12 | 6 | 4 |

С увеличением скорости в несколько раз время передвижения уменьшается во столько же раз. Значит, при данных условиях скорость и время — величины обратно пропорциональные.

### § 135. Свойство обратно пропорциональных величин.

Возьмём второй пример, который мы рассматривали в предыдущем параграфе. Там мы имели дело с двумя величинами — скоростью движения и временем. Если мы будем рассматривать по таблице значения этих величин слева направо, то увидим, что значения первой величины (скорости) возрастают, а значения второй (времени) убывают, причём *скорость увеличивается во столько же раз, во сколько раз уменьшается время*. Нетрудно сообразить, что если написать *отношение* каких-нибудь значений одной величины, то оно не будет равно отношению соответствующих значений другой величины. В самом деле, если мы возьмём отношение четвёртого значения верхней величины к седьмому значению (40 : 80), то оно не будет равно отношению четвёртого и седьмого значений нижней величины (30 : 15). Это можно написать так:

$$40 : 80 \text{ не равно } 30 : 15, \text{ или } 40 : 80 \neq 30 : 15.$$

Но если вместо одного из этих отношений взять *обратное*, то получится равенство, т. е. из этих отношений можно будет составить пропорцию. Например:

$$80 : 40 = 30 : 15,$$

или

$$40 : 80 = 15 : 30.$$

На основании изложенного мы можем сделать такой вывод: **если две величины обратно пропорциональны, то отношение двух произвольно взятых значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.**

### § 136. Формула обратной пропорциональности.

Рассмотрим задачу: «Имеется 6 кусков шёлковой ткани разной величины и различных сортов. Стоимость всех кусков одинаковая. В одном куске 100 *м* ткани ценой по 20 руб. за метр. Сколько метров в каждом из остальных пяти кусков, если метр ткани в этих кусках соответственно стóит 25, 40, 50, 80, 100 руб.?»

Для решения этой задачи составим таблицу:

| Число метров в куске | 100 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Цена 1 *м* (руб.) | 20 | 25 | 40 | 50 | 80 | 100 |

Нам нужно заполнить пустые клетки в верхней строке этой таблицы. Попробуем сначала определить, сколько метров во втором куске. Это можно сделать следующим образом. Из условия задачи известно, что стоимость всех кусков одинаковая. Стоимость первого куска определить легко: в нём 100 *м* и каждый метр стоит 20 руб., значит, в первом куске шёлка на 2 000 руб. Так как во втором куске шёлка на столько же рублей, то, разделив 2 000 руб. на цену одного метра, т. е. на 25, мы найдём величину второго куска: 2 000 : 25 = 80 (*м*). Таким же образом мы найдём величину всех остальных кусков. Таблица примет вид:

| Число метров в куске | 100 | 80 | 50 | 40 | 25 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Цена 1 *м* (руб.) | 20 | 25 | 40 | 50 | 80 | 100 |

Нетрудно видеть, что между числом метров и ценой существует обратно пропорциональная зависимость.

Если вы сами проделаете необходимые вычисления, то заметите, что каждый раз вам придётся делить число 2 000 на цену 1 *м*. Наоборот, если вы теперь начнёте умножать величину куска в метрах на цену 1 *м*, то всё время будете получать число 2 000. Этого и нужно было ожидать, так как каждый кусок стоит 2 000 руб.

Отсюда можно сделать такой вывод: **для данной пары обратно пропорциональных величин произведение любого значения одной величины на соответствующее значение другой величины есть число постоянное** (т. е. не изменяющееся).

В нашей задаче это произведение равно 2 000. Проверьте, что и в предыдущей задаче, где говорилось о скорости движения и времени, необходимом для переезда из одного города в другой, существовало также постоянное для той задачи число (1 200).

Принимая во внимание всё сказанное, легко вывести формулу обратной пропорциональности. Обозначим некоторое значение одной величины буквой $x$, а соответствующее значение другой величины — буквой $y$. Тогда на основании изложенного произведение $x$ на $y$ должно быть равно некоторой постоянной величине, которую обозначим буквой $K$, т. е.

$$x \cdot y = K.$$

В этом равенстве $x$ — множимое, $y$ — множитель и $K$ — произведение. По свойству умножения множитель равен произведению, делённому на множимое. Значит,

$$\boxed{y = \frac{K}{x}}.$$

Это и есть **формула обратной пропорциональности.** Пользуясь ею, мы можем вычислить сколько угодно значений одной из обратно пропорциональных величин, зная значения другой и постоянное число $K$.

Рассмотрим ещё задачу: «Автор одного сочинения рассчитал, что если его книга будет иметь обычный формат, то в ней будет 96 страниц, если же карманный формат, то в ней окажется 300 страниц. Он испробовал разные варианты, начал с 96 страниц, и тогда у него на странице получилось 2 500 букв. Затем он взял те числа страниц, какие указаны ниже в таблице, и снова вычислил, сколько букв будет на странице».

| Число страниц | 96 | 100 | 120 | 150 | 160 | 200 | 240 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число букв на странице | 2500 | | | | | | | |

Попробуем и мы вычислить, сколько будет букв на странице, если в книге будет 100 страниц.

Во всей книге 240 000 букв, так как 2 500 · 96 = 240 000.

Принимая это во внимание, воспользуемся формулой обратной пропорциональности ($y$ — число букв на странице, $x$ — число страниц):

$$y = \frac{K}{x}.$$

В нашем примере $K = 240\,000$, следовательно,

$$y = \frac{240\,000}{100} = 2\,400.$$

Итак, на странице 2 400 букв.

Подобно этому узнаем, что если в книге будет 120 страниц, то число букв на странице будет:

$$y = \frac{240\,000}{120} = 2\,000.$$

Наша таблица примет вид:

| Число страниц | 96 | 100 | 120 | 150 | 160 | 200 | 240 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число букв на странице | 2500 | 2400 | 2000 | | | | | |

Остальные клетки заполните самостоятельно.

## § 137. Другие способы решения задач с обратно пропорциональными величинами.

В предыдущем параграфе мы решали задачи, в условия которых входили обратно пропорциональные величины. Мы предварительно вывели формулу обратной пропорциональности и потом эту формулу применяли. Теперь мы покажем для таких задач два других способа решения.

**1. Способ приведения к единице.** З а д а ч а . 5 токарей могут сделать некоторую работу в 16 дней. Во сколько дней могут выполнить эту работу 8 токарей?

Р е ш е н и е. Между числом токарей и рабочим временем существует обратно пропорциональная зависимость. Если 5 токарей делают работу за 16 дней, то одному человеку для этого понадобится в 5 раз больше времени, т. е.

5 токарей выполняют работу в 16 дней,

1 токарь выполнит её в $16 \times 5 = 80$ дней.

В задаче спрашивается, во сколько дней выполнят работу 8 токарей. Очевидно, они справятся с работой в 8 раз скорее, чем 1 токарь, т. е. за

$$80 : 8 = 10 \text{ (дней)}.$$

Это и есть решение задачи способом приведения к единице. Здесь пришлось прежде всего определить время выполнения работы о д н и м рабочим.

**2. Способ пропорции.** Решим ту же задачу вторым способом.

Так как между числом рабочих и рабочим временем существует обратно пропорциональная зависимость, то можно написать:

$$\frac{\text{продолжительность работы 5 токарей}}{\text{продолжительность работы 8 токарей}} = \frac{\text{новое число токарей (8)}}{\text{прежнее число токарей (5)}}$$

Обозначим искомую продолжительность работы буквой $x$ и подставим в пропорцию, выраженную словами, необходимые числа:

$$\frac{16}{x} = \frac{8}{5}.$$

Отсюда:

$$x = \frac{16 \cdot 5}{8} = 10 \text{ (дней)}.$$

Та же самая задача решена способом пропорций. Для её решения нам пришлось составить пропорцию из чисел, входящих в условие задачи.

Примечание. В предыдущих параграфах мы рассмотрели вопрос о прямой и обратной пропорциональности. Природа и жизнь дают нам множество примеров прямой и обратной пропорциональной зависимости величин. Однако нужно заметить, что эти два вида зависимости являются только простейшими. Наряду с ними встречаются иные, более сложные зависимости между величинами. Кроме того, не нужно думать, что если какие-нибудь две величины одновременно возрастают, то между ними обязательно существует прямая пропорциональность. Это далеко не так. Например, плата за проезд по железной дороге возрастает в зависимости от расстояния: чем дальше мы едем, тем больше платим, но это не значит, что плата пропорциональна расстоянию.

---

Глава двадцать первая.

# Пропорциональное деление.

## § 138. Деление числа на части прямо пропорционально данным числам.

Задача. В саду на двух участках посажено 224 штуки рассады клубники. Определить, сколько штук рассады посажено на каждом участке, если площадь первого участка 8 *кв. м*, а площадь второго 24 *кв. м*. (На каждом квадратном метре земли сажают рассаду в среднем поровну.)

Будем решать эту задачу так. Сначала определим площадь двух участков вместе:

$$8 + 24 = 32 \text{ (кв. м)}.$$

Итак, площадь двух участков вместе 32 *кв. м*. Определим теперь, сколько штук рассады приходится на 1 *кв. м*:

$$224 : 32 = 7 \text{ (штук)}.$$

Зная сколько рассады приходится на 1 *кв. м*, мы легко вычислим число штук рассады на 8 *кв. м* и на 24 *кв. м*, т. е. ответим на вопрос задачи:

$$7 \times 8 = 56 \text{ (штук)}; \quad 7 \times 24 = 168 \text{ (штук)}.$$

Подумаем теперь, какие величины входят в нашу задачу и как они связаны между собой. В условие задачи входят две величины: 1) количество штук рассады, 2) площадь участка. Эти две величины прямо пропорциональны одна другой, потому что, чем больше площадь участка, тем больше на нём можно посадить рассады. Расположим числа, с которыми мы имели дело в задаче, так, чтобы их удобно было сравнивать:

8 *кв. м* — 56 штук
24 *кв. м* — 168 штук

Из этой таблички видно, что второй участок втрое больше первого и рассады на нём в три раза больше, чем на первом.

Итак, в этой задаче мы разделили число штук рассады пропорционально площадям двух участков. Это и есть одна из возможных задач на пропорциональное деление. Как же решаются такие задачи? В задаче требовалось число 224 разделить на две части, пропорциональные числам 8 и 24, т. е. разделить это число на такие две части, которые относились бы между собой так же, как 8 : 24. Обозначим величину первой части буквой $x$, а второй части — $y$ и напишем отношение этих частей:

$$\frac{x}{y} = \frac{8}{24}$$

Для нахождения этих частей были выполнены следующие действия. Число 224 разделили на сумму чисел 8 и 24 и затем найденное частное последовательно умножили сначала на 8, а потом на 24, т. е.

$$x = \frac{224}{8+24} \cdot 8; \quad x = 56; \quad y = \frac{224}{8+24} \cdot 24; \quad y = 168.$$

Словами эти равенства можно высказать так: **чтобы разделить некоторое число на части пропорционально данным числам, надо разделить его на сумму этих чисел и полученное частное последовательно умножить на каждое из этих чисел.**

Рассмотрим другую задачу: «За три куска мыла одного и того же сорта заплатили 40 руб. Сколько заплатили за каждый из них, если первый кусок весил 2 *кг*, второй 3 *кг* и третий 5 *кг*?»

В этой задаче требуется разделить 40 руб. на 3 части пропорционально весу отдельных кусков мыла. Обозначим стоимость первого куска буквой $x$, второго куска — $y$ и третьего — $z$.

Воспользуемся правилом, выведенным при решении первой задачи. Согласно этому правилу для нахождения искомых чисел необходимо число, подлежащее делению, разделить на сумму данных чисел и полученное частное умножить последовательно на каждое из них. Следовательно:

$$x = \frac{40}{2+3+5} \cdot 2 = 8; \quad y = \frac{40}{2+3+5} \cdot 3 = 12,$$

$$z = \frac{40}{2+3+5} \cdot 5 = 20.$$

Таким образом, первый кусок мыла стоит 8 руб., второй 12 руб. и третий 20 руб. Найденные числа рублей $x$, $y$, $z$ находятся между собой в таких же отношениях, как и данные в задаче числа весовых единиц, т. е.

$$x : y : z = 8 : 12 : 20 = 2 : 3 : 5.$$

Рассмотрим теперь задачу с отвлечёнными числами. Разделить число 180 на три части пропорционально числам 3; 5; 7. Иными словами: в этой задаче требуется разложить число 180 на такие три слагаемых, чтобы первое относилось ко второму, как 3 к 5, второе относилось к третьему, как 5 к 7 и, наконец, первое к третьему, как 3 к 7. Сокращённо это можно написать так:

$$x : y : z = 3 : 5 : 7,$$

где $x$, $y$, $z$ обозначают соответственно первое, второе и третье число.

Содержание этой задачи можно пояснить ещё так: требуется разложить число 180 на 3 числа так, чтобы первое число содержало три части (три доли, три пая), второе — пять таких же частей и третье — семь таких же частей.

Применяя указанное выше правило, можем написать:

$$x = \frac{180}{3+5+7} \cdot 3 = 36; \quad y = \frac{180}{3+5+7} \cdot 5 = 60;$$

$$z = \frac{180}{3+5+7} \cdot 7 = 84.$$

Полученные три числа удовлетворяют условию задачи: они в сумме составляют 180, т. е.

$$36 + 60 + 84 = 180 \text{ и } 3 : 5 : 7 = 36 : 60 : 84.$$

Мы решили три задачи на пропорциональное деление. Покажем теперь другие способы решения таких задач.

Задача 1. Определить квартирную плату за каждую из двух комнат (8 *кв. м* и 24 *кв. м*), если за обе вместе нужно заплатить 64 руб.

Обозначим плату за 1 *кв. м* буквой $x$; тогда за первую комнату нужно будет заплатить $8x$, а за вторую — $24x$. Значит, за обе комнаты вместе надо заплатить $8x + 24x$, что составляет 64 руб. Следовательно, можно записать равенство:

$$8x + 24x = 64.$$

Отсюда:

$$32x = 64;$$

$$x = 64 : 32 = 2 \text{ (руб.)}.$$

Дальше задача решается так:

$$2 \cdot 8 = 16 \text{ (руб.)}; \quad 2 \cdot 24 = 48 \text{ (руб.)}.$$

Задача 2. Найти стоимость каждого из трёх пакетов муки, если все три пакета стоят 40 руб., а вес первого 2 *кг*, второго 3 *кг* и третьего 5 *кг*.

Обозначим цену одного килограмма буквой $x$, тогда:

2 *кг* будут стоить $2x$;
3 *кг* » » $3x$;
5 *кг* » » $5x$;

а вся мука будет стоить:

$$2x + 3x + 5x = 40.$$

Отсюда:

$$10x = 40; \; x = 40 : 10 = 4 \text{ (руб.)}.$$

После этого легко определить стоимость каждого пакета;

$$2x = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (руб.)};$$
$$3x = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (руб.)};$$
$$5x = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (руб.)}.$$

Задача 3. Разделить число 1 800 на три слагаемых пропорционально числам: 3, 5 и 7.

Рассуждаем так: в первом слагаемом 3 части, во втором 5 и в третьем 7.

Обозначая величину одной части буквой $x$, можно написать:

$$3x + 5x + 7x = 1\,800.$$

Отсюда:

$$15x = 1\,800; \; x = 1\,800 : 15 = 120.$$

Следовательно:

$$3x = 3 \cdot 120 = 360;$$
$$5x = 5 \cdot 120 = 600;$$
$$7x = 7 \cdot 120 = 840.$$

Решим теперь задачу, в которой некоторое число придётся разделить на четыре части пропорционально дробным числам.

Задача. Разделить 968 на четыре части пропорционально числам: $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$. Это значит, что надо найти четыре таких числа ($x$, $y$, $z$, $t$), отношения которых были бы равны соответствующим отношениям данных чисел, т. е.

$$x:y:z:t = \frac{3}{2}:\frac{3}{4}:\frac{2}{5}:\frac{3}{8},$$

$$\text{а сумма } x + y + z + t = 968.$$

Заменим отношения дробных чисел отношениями целых чисел, для чего приведём эти дроби к общему знаменателю;

$$\frac{3}{2}:\frac{3}{4}:\frac{2}{5}:\frac{3}{8} = \frac{60}{40}:\frac{30}{40}:\frac{16}{40}:\frac{15}{40}.$$

Отбрасывая общий знаменатель 40, получим: 60 : 30 : 16 : 15.

Вычислим последовательно каждое из искомых чисел:

$$x = \frac{968}{60+30+16+15} \cdot 60 = \frac{968 \cdot 60}{121} = 480; \quad y = \frac{968}{121} \cdot 30 = 240;$$

$$z = \frac{968}{121} \cdot 16 = 128; \quad t = \frac{968}{121} \cdot 15 = 120.$$

Ответ. $x = 480$; $y = 240$; $z = 128$; $t = 120$.

## § 139. Деление числа на части обратно пропорционально данным числам.

Теперь перейдём к решению задач, в которых придётся некоторое число делить обратно пропорционально данным числам.

Задача. В двух полевых бригадах 70 колхозников. Каждой бригаде поручено обработать одинаковые участки. Сколько колхозников в каждой бригаде, если первая бригада выполнила работу в 6 дней, а вторая — в 8 дней? (Предполагается, что все колхозники работают с одинаковой производительностью труда.)

Очевидно, мы не имеем права делить число колхозников на две части пропорционально времени, которое каждая бригада употребила на работу, так как та бригада, которая быстрее окончила свою работу, была, по-видимому, более многочисленная, чем другая. Поэтому решать эту задачу так же, как мы решали предыдущие задачи, нельзя.

Будем рассуждать следующим образом. Первая бригада колхозников окончила свою работу в 6 дней; значит, в один день она выполняла $\frac{1}{6}$ часть всей работы; вторая бригада окончила такую же работу в 8 дней, значит в один день она выполняла $\frac{1}{8}$ всей работы. Сравним теперь работу, которую выполняет в день первая бригада, с работой, выполняемой в день второй бригадой. Эти работы выражаются дробями $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$. Первая дробь больше второй. Значит, первая бригада в один день может делать больше, чем вторая. А так как все колхозники работают с одинаковой производительностью труда, то, значит, в первой бригаде больше колхозников, чем во второй. Таким образом, число колхозников в каждой бригаде пропорционально той работе, которую каждая бригада может выполнить. Значит, данное в задаче число 70 мы должны разделить на две части пропорционально числам: $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$. С задачами такого типа мы уже знакомы. Приведя дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$ к общему знаменателю, мы найдём числа, пропорционально которым следует разделить число 70:

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{8} = \frac{4}{24} : \frac{3}{24} = 4 : 3,$$

т. е. число 70 нужно разделить на две части пропорционально числам 4 и 3. Обозначим число колхозников первой бригады буквой $x$, а второй — буквой $y$ и вычислим:

$$x = \frac{70}{7} \cdot 4 = 40, \quad y = \frac{70}{7} \cdot 3 = 30.$$

Итак, в первой бригаде было 40 человек, а во второй 30.

Рассмотрим теперь м е т о д решения этой задачи. В условие задачи входят три числа: 70 (человек), 6 (дней) и 8 (дней). В процессе решения мы ввели ещё два числа: $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$, и пропорционально этим дробям разделили число 70 на две части. Очевидно, что число 6 и число $\frac{1}{6}$ взаимно обратны. Так же взаимно обратны числа 8 и $\frac{1}{8}$.

Для решения задачи требуется разделить 70 рабочих на две неравные бригады, исходя из количества времени (дней), затраченного ими на работу. Это время выражается числами 6 (дней) и 8 (дней). Вместо этих двух чисел мы берём обратные им числа $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{8}$ и пропорционально им делим число 70.

Такая замена сделана нами потому, что число работников не прямо, а обратно пропорционально времени, затраченному на работу. О такой задаче принято говорить, что в ней число 70 р а з д е л е н о на две части о б р а т н о п р о п о р ц и о н а л ь н о числам 6 и 8, т. е. в ней первая часть относится ко второй не как 6 к 8, а как 8 к 6.

**Итак, чтобы разделить число на части обратно пропорционально данным числам, нужно это число разделить прямо пропорционально обратным числам.**

З а д а ч а. Разделить 65 на три части обратно пропорционально числам: 2, 3, 4.

Мы теперь знаем, что разделить число на части обратно пропорционально нескольким числам — это значит разделить его на столько же частей прямо пропорционально обратным числам.

Напишем числа, обратные данным в задаче:

данные числа 2, 3, 4;

обратные числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Пропорционально этим последним и нужно разделить число 65. Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{6}{12}:\frac{4}{12}:\frac{3}{12},$$

а потом освободимся от него:

$$6:4:3.$$

Значит, число 65 нужно разделить на три части пропорционально числам 6 : 4 : 3.

Обозначим первую часть буквой $x$, вторую часть буквой $y$, третью часть буквой $z$. Тогда

$$x=\frac{65\cdot 6}{6+4+3}=\frac{65}{13}\cdot 6=30;\quad y=\frac{65}{13}\cdot 4=20;\quad z=\frac{65}{13}\cdot 3=15.$$

## ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ (ДО 1 000).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 61 | 149 | 239 | 347 | 443 | 563 | 659 | 773 | 887 |
| 3 | 67 | 151 | 241 | 349 | 449 | 569 | 661 | 787 | 907 |
| 5 | 71 | 157 | 251 | 353 | 457 | 571 | 673 | 797 | 911 |
| 7 | 73 | 163 | 257 | 359 | 461 | 577 | 677 | 809 | 919 |
| 11 | 79 | 167 | 263 | 367 | 463 | 587 | 683 | 811 | 929 |
| 13 | 83 | 173 | 269 | 373 | 467 | 593 | 691 | 821 | 937 |
| 17 | 89 | 179 | 271 | 379 | 479 | 599 | 701 | 823 | 941 |
| 19 | 97 | 181 | 277 | 383 | 487 | 601 | 709 | 827 | 947 |
| 23 | 101 | 191 | 281 | 389 | 491 | 607 | 719 | 829 | 953 |
| 29 | 103 | 193 | 283 | 397 | 499 | 613 | 727 | 839 | 967 |
| 31 | 107 | 197 | 293 | 401 | 503 | 617 | 733 | 853 | 971 |
| 37 | 109 | 199 | 307 | 409 | 509 | 619 | 739 | 857 | 977 |
| 41 | 113 | 211 | 311 | 419 | 521 | 631 | 743 | 859 | 983 |
| 43 | 127 | 223 | 313 | 421 | 523 | 641 | 751 | 863 | 991 |
| 47 | 131 | 227 | 317 | 431 | 541 | 643 | 757 | 877 | 997 |
| 53 | 137 | 229 | 331 | 433 | 547 | 647 | 761 | 881 | |
| 59 | 139 | 233 | 337 | 439 | 557 | 653 | 769 | 883 | |

# ОГЛАВЛЕНИЕ.

## Часть первая.

## ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА.

Часть вторая.

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ.



Часть третья.

## ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ.